

几类非线性偏微分方程量化涡旋的 约化动力学规律研究

(申请清华大学理学博士学位论文)

培养单位：数学科学系

学 科：数学

研 究 生：朱 永 兴

指导教师：简怀玉 教授

二〇二三年十二月

**On the Reduced Dynamical Laws of
Quantized Vortices of Some Nonlinear
Partial Differential Equations**

Dissertation submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in

Mathematics

by

Yongxing Zhu

Dissertation Supervisor: Professor Huaiyu Jian

December, 2023

公开评阅人和答辩委员会名单

公开评阅人名单

黄忠亿	教授	清华大学
张立群	研究员	中国科学院 数学与系统科学研究院
曹道民	研究员	中国科学院 数学与系统科学研究院
周蜀林	教授	北京大学
蔡勇勇	教授	北京师范大学

答辩委员会名单

主席	张立群	研究员	中国科学院 数学与系统科学研究院
委员	周蜀林	教授	北京大学
	黄忠亿	教授	清华大学
	蔡勇勇	教授	北京师范大学
	郭玉霞	教授	清华大学
	李宇翔	教授	清华大学
秘书	李新宇	助理研究员	清华大学

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》及上级教育主管部门具体要求，向国家图书馆报送相应的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

作者签名： 朱永兴

日 期： 2023年12月6日

导师签名：

日 期：


2023-12-06

摘要

超导、超流和玻色-爱因斯坦凝聚是部分物质在极低温下表现出来的特殊状态, 在实际应用和理论研究中有着重要价值, 而量化涡旋就是相关研究中的一种核心现象. 这些物质状态常常可以用一些非线性偏微分方程描述, 例如非线性薛定谔方程、复金兹堡-朗道方程、非线性波方程、带波算子的非线性薛定谔方程等. 本文研究了在量化涡旋核心半径 $\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下, 二维环面上的上述四个方程量化涡旋的动力学规律, 也即约化动力学规律.

作为证明相关方程量化涡旋约化动力学规律的工具, 本文首先考虑环面非平凡基本群对环面上函数的约束, 定义了环面上的规范调和映射和重整化能量, 讨论了两者之间的联系并证明了有关的能量估计. 然后研究偏微分方程解 u^ε 的动量

$$Q(u^\varepsilon) = \int \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) dx,$$

证明了极限动量 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(u^\varepsilon(t))$ 关于时间的连续性. 之后利用这些工具, 本文严格证明了: (1) 非线性薛定谔方程量化涡旋的约化动力学规律是一个哈密顿系统, 而且其哈密顿量就是环面上的重整化能量; (2) 复金兹堡-朗道方程的约化动力学规律是一个哈密顿系统与梯度流的混合, 而且其哈密顿量也是环面上的重整化能量; (3) 非线性波方程以及带波算子的非线性薛定谔方程的约化动力学规律是两个与环面上重整化能量直接相关的常微分方程. 特别地, 本文证明了极限动量对于环面上量化涡旋的约化动力学规律的影响.

本文给出了非线性薛定谔方程和复金兹堡-朗道方程对应的约化动力学规律的首次积分, 并且得到了一些带有特定对称初值的约化动力学规律的解析解. 此外, 通过对四个约化动力学规律方程数值求解, 我们研究了初值位置和极限动量对量化涡旋运动规律的影响以及在非相对论极限下带波算子的非线性薛定谔方程的约化动力学规律到非线性薛定谔方程的约化动力学规律的收敛性.

关键词: 约化动力学规律; 非线性薛定谔方程; 复金兹堡-朗道方程; 非线性波方程; 带波算子的非线性薛定谔方程

Abstract

Superconductivity, superfluidity and Bose-Einstein condensate are some physical states which appear in very low temperature, which are important in the theoretical research and application. Quantized vortices are the key phenomena of these special physical states. Mathematically, these physical states are usually described by some partial differential equations, such as nonlinear Schrödinger equation (NLS), the complex Ginzburg-Landau equation (CGL), the nonlinear wave equation (NLW) and the nonlinear Schrödinger equation with wave operator (NLSW). In this thesis, we study the quantized vortex dynamics of the above equations on the torus as the vortex core size $\varepsilon \rightarrow 0$, which are also called the reduced dynamical laws (RDL).

To prove the RDLs, we consider a constraint of a function on the torus caused by the nontrivial fundamental group of the torus, and we define the canonical harmonic map and the renormalized energy on the torus. We also study the connection between these two functions and prove some energy estimates. Then, we consider the momentum

$$\mathbf{Q}(u^\varepsilon) = \int \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) dx$$

of the solution u^ε , and prove the continuity of the limit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ with respect to t . With these tools, we prove rigorously that: (1) the RDL of NLS is a Hamiltonian system driven by the renormalized energy on the torus; (2) the RDL of CGL is a mixed state of a Hamiltonian system and a gradient flow which are also driven by the renormalized energy on the torus; (3) the RDLs of NLW and NLSW are two second-order ordinary differential equations which are driven by the renormalized energy on the torus. In particular, we prove rigorously the effect of the limit momentum on the RDLs.

We give some first integrals of the RDLs related to NLS and CGL, and we obtain some analytical solutions of these RDLs with symmetric initial data. Via numerical simulation, we investigate how the positions of initial vortices and the limit momentum influence the RDLs, and we study the convergence of the RDL of NLSW to the RDL of NLS in the nonrelativistic limit.

Keywords: reduced dynamical law; nonlinear Schrödinger equation; complex Ginzburg-Landau equation; nonlinear wave equation; nonlinear Schrödinger equation with wave operator

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	III
插图清单.....	V
符号和缩略语说明.....	VI
第 1 章 引言	1
1.1 选题背景.....	1
1.1.1 超流中的量化涡旋.....	1
1.1.2 量化涡旋的约化动力学规律.....	3
1.1.3 相关文献综述.....	5
1.2 研究内容.....	7
1.3 主要结果.....	8
1.3.1 关于非线性薛定谔方程.....	10
1.3.2 关于复金兹堡-朗道方程.....	10
1.3.3 关于非线性波方程.....	11
1.3.4 关于带波算子的非线性薛定谔方程.....	11
1.3.5 本文主要创新点.....	12
1.4 论文结构安排.....	12
第 2 章 非线性薛定谔方程量化涡旋的约化动力学规律	13
2.1 规范调和映射与重整化能量.....	14
2.1.1 环面上的 S1 函数.....	15
2.1.2 规范调和映射.....	18
2.1.3 重整化能量的梯度.....	20
2.1.4 重整化能量与规范调和映射的联系.....	20
2.2 量化涡旋的存在性.....	24
2.3 约化动力学规律.....	31
2.3.1 定理 2.1 的证明.....	31
2.3.2 约化动力学规律的首次积分.....	35

2.3.3 约化动力学规律的一些解析解及数值结果.....	36
第 3 章 复金兹堡-朗道方程量化涡旋的约化动力学规律	40
3.1 量化涡旋的存在性.....	41
3.2 约化动力学规律的证明.....	47
3.3 约化动力学规律的性质.....	50
3.3.1 首次积分.....	50
3.3.2 具有特殊对称性的初值的解.....	51
第 4 章 非线性波方程量化涡旋的约化动力学规律	55
4.1 量化涡旋的存在性.....	56
4.1.1 雅可比行列式与流量的收敛性.....	56
4.1.2 解的能量下界估计.....	59
4.2 约化动力学规律的证明.....	60
4.3 量化涡旋偶极子的数值计算.....	64
第 5 章 带波算子的非线性薛定谔方程量化涡旋的约化动力学规律	66
5.1 量化涡旋的存在性.....	67
5.1.1 雅可比行列式的收敛性.....	67
5.1.2 流量的收敛性.....	70
5.1.3 解的能量下界估计.....	71
5.2 约化动力学规律的证明.....	72
5.3 数值结果.....	74
第 6 章 结论与展望	77
参考文献.....	78
致 谢.....	84
声 明.....	85
个人简历、在学期间完成的相关学术成果.....	86
指导教师评语.....	87
答辩委员会决议书.....	88

插图清单

图 1.1	观测量化涡旋的一个装置示意图与结果	2
图 1.2	量化涡旋数目较大时其分布呈现等边三角格子型分布	3
图 2.1	在 $N = 1$ 时不同初值的 NLSRDL (式 (2-7)) 的解的轨迹	38
图 2.2	在 $N = 2$ 时不同初值的 NLSRDL (式 (2-7)) 的解的轨迹	38
图 3.1	带有不同 λ 的式 (3-7) 解的一些轨迹以及式 (2-7) 的解的轨迹	52
图 3.2	$\lambda = 1$ 的式 (3-7) 的一些解的轨迹	53
图 4.1	式 (4-8) 解的轨迹	64
图 4.2	式 (4-8) 解的路径以及 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)^T, \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)^T$ 的值	65
图 5.1	不同 μ 的式 (5-8) 与式 (2-7) 解的轨迹以及 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)^T$ 的数值	76

符号和缩略语说明

t	时间变量
\mathbf{x}	空间变量
\mathbf{n}	曲线的外法向量
\mathbb{J}	矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{\tau}$	曲线的单位切向量
σ	曲线的弧长参数
$B_{r_1} \setminus B_{r_2}(\mathbf{x})$	环形 $B_{r_1}(\mathbf{x}) \setminus B_{r_2}(\mathbf{x})$ 的简写
\mathbb{T}^2	环面 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$
\mathbb{S}^1	一维单位球面 $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 x^2 + y^2 = 1\}$
\mathbb{S}^2	二维单位球面 $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
$(\mathbb{T}^2)_*^{2N}$	$\{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)^{2N} \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_k \text{ 对任意 } 1 \leq j < k \leq 2N \text{ 成立}\}$
$(\mathbb{T}^2)_\rho^{2N}$	$\{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)^{2N} \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k > \rho, \forall 1 \leq j < k \leq 2N\}$
$\mathbb{T}_*^2(\mathbf{a})$	$\mathbb{T}^2 \setminus \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}\}$, 其中 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$
$\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})$	$\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{2N} B_\rho(\mathbf{a}_j)$, 其中 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$
$r(\mathbf{a})$	$\frac{1}{4} \min_{1 \leq j < k \leq 2N} \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k $, 其中 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$
$W^{-1,1}(\Omega)$	$(C_0^1(\Omega))'$, 其中 Ω 为区域或者流形
$E^\varepsilon(u)$	\mathbb{T}^2 上的复值函数 u 的金兹堡-朗道泛函
F	\mathbb{T}^2 上的格林函数
H	\mathbb{T}^2 上的规范调和映射 (canonical harmonic map)
$j(u)$	复值函数 u 的流量 (current)
$Q(u)$	\mathbb{T}^2 上的复值函数 u 的动量
$J(u)$	u 的雅可比行列式: $J(u) = \text{Im}(\partial_x \bar{u} \partial_y u)$
W	\mathbb{T}^2 上的重整化能量 (renormalized energy)
χ_Ω	区域 Ω 上的特征函数 (characteristic function)
δ	狄拉克- δ 函数 (Dirac- δ function)
CGL	复金兹堡-朗道方程 (complex Ginzburg-Landau equation)
NLS	非线性薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation)
NLW	非线性波方程 (nonlinear Schrödinger equation)
NLSW	带波算子的非线性薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation with wave operator)
RDL	约化动力学规律 (reduced dynamical law)

CGLRDL	复金兹堡-朗道方程的约化动力学规律
NLSRDL	非线性薛定谔方程的约化动力学规律
NLWRDL	非线性波方程的约化动力学规律
NLSWRDL	带波算子的非线性薛定谔方程的约化动力学规律

第1章 引言

1.1 选题背景

1.1.1 超流中的量化涡旋

超导 (superconductivity)、超流 (superfluidity) 以及玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate) 是在极低温下部分物质所表现出来的特殊现象, 其已经得到了实验和理论上的广泛研究^[1-6]. 而量化涡旋 (quantized vortex) 就是在相关研究中常见的一种拓扑缺陷 (topological defect), 其也得到了广泛的关注^[1-2,4,7-10]. 这些物理现象通常使用一些非线性偏微分方程描述, 例如非线性薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation)、金兹堡-朗道方程 (Ginzburg-Landau equation)、复金兹堡-朗道方程 (complex Ginzburg-Landau equation)、非线性波方程 (nonlinear wave equation) 和带波算子的薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation with wave operator) 等. 下面我们将以超流态为例做简单介绍.

超流态于 1938 年由 P. Kapitza、J.F. Allen 和 A.D. Misener 等在研究液态 ^4He 时被发现. 在 2.2K 左右, 已经液化的 ^4He 会有特殊的相变, 相对于高于 2.2K 的液 ^4He , 低于 2.2K 的液 ^4He 也被记为 He-II. Kapitza 等人发现在流动时, He-II 不受摩擦力影响^[11]. 然而, 后续研究发现 He-II 的内摩擦力似乎并未完全消失, 例如在 He-II 内的摆也会有能量耗散^[11]. 为了解释这一现象, Tisza^[12] 和 Landau^[13] 等引入了一个唯相的两相模型, 即在 He-II 中既存在超流态的 ^4He (密度为 ρ_s , 流速为 \mathbf{v}_s), 也有普通态的 ^4He (密度为 ρ_n , 流速为 \mathbf{v}_n). 之后, Gross^[14] 和 Pitaevskii^[15] 建立了两相模型与如下非线性薛定谔方程的联系, 该方程也称格罗斯-皮塔耶夫斯基方程 (Gross-Pitaevskii equation)^[2,16]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext} + g|\Psi|^2 \right) \Psi, \quad (1-1)$$

其中 \hbar 是普朗克常量 (Planck constant), $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$ 是一个复值函数, 称作序参量 (order parameter), m 是粒子质量, V_{ext} 是外势场, g 是一个与材料有关的物理量. 与一般薛定谔方程中的波函数模长平方代表概率密度不同, 该模型中的 Ψ 与系统中超流体的密度 ρ_s 有关: $\rho_s = m|\Psi|^2$. 同时超流体的速度 \mathbf{v}_s 则与辐角 θ 相关: $\mathbf{v}_s = (\hbar/m)\nabla\theta$. 在该数学描述下, 系统的量化涡旋 \mathbf{x}_0 就是 Ψ 的满足

$$\int_{\Gamma_{\mathbf{x}_0}} \mathbf{v}_{sup} \cdot \boldsymbol{\tau} d\sigma = 2d\pi \frac{\hbar}{m}, \quad d \in \mathbb{Z}_* \quad (1-2)$$

的零点. 上式中 $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$ 是一个环绕 \mathbf{x}_0 的足够小的简单闭曲线. 特别地, 在二维空间中,

量化涡旋就是序参量的孤立零点; 在三维空间中量化涡旋构成一条条的涡线; 在更高维的空间中, 量化涡旋构成余维数为 2 的子流形. 自从被 Onsage 等预测并被实验验证之后, 量化涡旋一直是超流态核心现象之一, 并受到了广泛研究^[16-18].

一个实验上在超流体中产生量化涡旋的思路如下: 在一个细长的圆柱体中注入超流态 ^4He 和少量 ^3He 以产生混合态, 并且令容器沿着圆柱体的轴以大小为 ω 的角速度旋转, 如图 1.1(a) 所示. 通过以往的理论实验研究^[1-2,4,16], 我们得到了

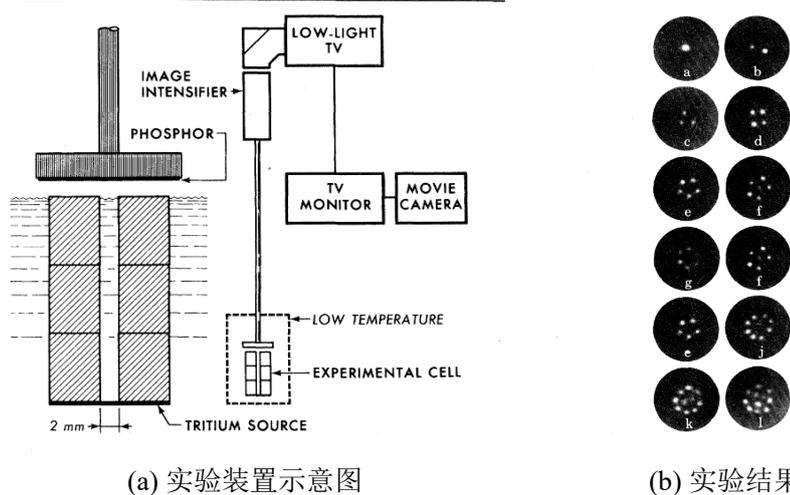
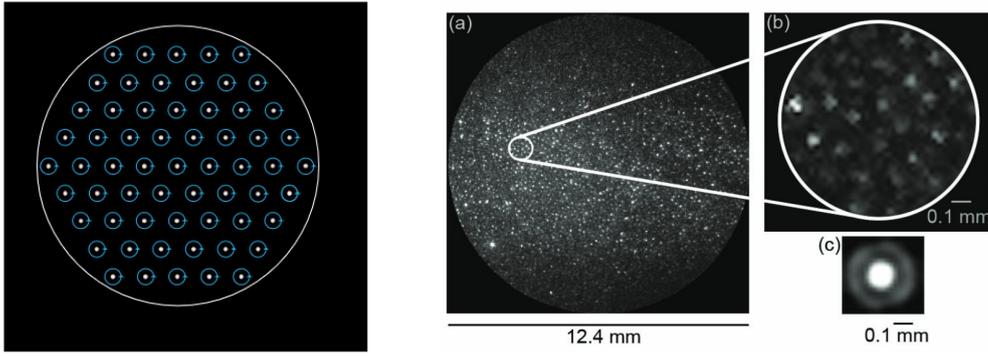


图 1.1 观测量化涡旋的一个装置示意图与结果, 来源: Yarmchuk 等^[4]

以下两个事实:

1. 量化涡旋核心区域半径 ϵ 的量级为 10^{-10} 米, 与之相对的, 研究装置的半径 R_c 一般是几毫米;
2. 存在两个临界角速度 $\omega_{c1} = (\hbar/mR_c^2) \ln(R_c/\epsilon)$, $\omega_{c2} = \hbar/m\pi\epsilon^2$, 使得当 $\omega < \omega_{c1}$ 时, 系统量化涡旋个数 M 有限, 并呈现特定的分布 (参考图1.1(b)); 在 $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$ 时, 系统会出现大量 (其密度 $M/(\pi R_c^2) \approx 2m\omega/\hbar$) 的量化涡旋, 而且其呈现特定分布, 例如 $\omega_{c1} \ll \omega \ll \omega_{c2}$ 时会出现等边三角格子型分布 (triangular lattice), 如图 1.2; 在 $\omega > \omega_{c2}$ 时, 量化涡旋消失, 系统的超导性也随之消失.

这两个结论提示可以根据量化涡旋半径 ϵ 和量化涡旋个数 M 两个量的大小将我们的研究问题作如下分类: 一是根据 ϵ 可以分为两类 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 或者 ϵ 很小但固定; 二是根据 M 相对于 ϵ 的大小分为 $M = O(1)$, $M = O(|\ln \epsilon|)$, $M \gg |\ln \epsilon|$ 等几类.



(a) 示意图

(b) 实验结果

 图 1.2 量化涡旋数目较大时其分布呈现等边三角格子型分布, 来源: Gaff^[19]

1.1.2 量化涡旋的约化动力学规律

在量化涡旋的数学研究中, 我们通常考虑无量纲化 (dimensionless) 的方程, 如式 (1-1) 的无量纲化版本

$$i\partial_t u - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1-3)$$

抛物型金兹堡-朗道方程 (parabolic Ginzburg-Landau equation)

$$k_\varepsilon \partial_t u - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1-4)$$

或者非线性波方程

$$k_\varepsilon \partial_t^2 u - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)u = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1-5)$$

以及其他带有类似非线性项的方程. 其中 $0 < \varepsilon \ll 1$ 描述量化涡旋核心区域半径, $k_\varepsilon = 1/|\ln \varepsilon|$, Ω 根据不同的研究问题可以取为 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{S}^2$ 及其有界子区域, 相应的边界条件也分为狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件:

$$u(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}), \quad |g_0(\mathbf{x})| = 1, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1-6)$$

和诺伊曼 (Neumann) 边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1-7)$$

初值则为 $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$. 这些方程的共同点是它们都有相同的非线性项, 而且都可以写成如下金兹堡-朗道泛函 (Ginzburg-Landau functional) 的变分形式:

$$E_\Omega^\varepsilon(u) := \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)^2 \right) dx. \quad (1-8)$$

例如式 (1-4) 就是 $E_\Omega^\varepsilon(u)$ 的梯度流:

$$k_\varepsilon \partial_t u = \frac{\delta E_\Omega^\varepsilon(u)}{\delta u}. \quad (1-9)$$

在以上模型中, 量化涡旋就是环绕数不为零的 u 的零点. 其中一个复值函数 $u = |u|e^{i\Theta}$ 的零点 \mathbf{x}_0 的环绕数 (winding number) 为

$$d := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\mathbf{x}_0}} \frac{\text{Im}(\bar{u}\nabla u)}{|u|^2} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\mathbf{x}_0}} \nabla\Theta d\sigma. \quad (1-10)$$

在式 (1-10) 中, $\Gamma_{\mathbf{x}_0}$ 是一个简单闭曲线, 而且满足其所包围的区域内只有 \mathbf{x}_0 一个量化涡旋.

在 \mathbb{R}^2 上, 典型的带有一个环绕数为 d 的量化涡旋的函数为

$$u(\mathbf{x}) = f_d^\varepsilon(|\mathbf{x}|) \left(\frac{x + iy}{|\mathbf{x}|} \right)^d, \quad (1-11)$$

其中 $\mathbf{x} = (x, y)^T$, f_d^ε 是如下方程的解

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{d^2}{r^2}f(r) - \frac{1}{\varepsilon^2}(f(r)^2 - 1)f(r) = 0, f(0) = 0, f(+\infty) = 1. \quad (1-12)$$

显然, 由式 (1-11) 给出的 u 是如下方程的一个轴对称解:

$$-\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)u = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (1-13)$$

根据 Neu^[20], Mironescu^[21] 等人的结果, 我们知道只有在 $d = \pm 1$ 时, 如式 (1-11) 所给的轴对称解在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时是稳定的.

在二维有界区域 Ω 上, 一个典型的带有 M 个量化涡旋 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M$ 的函数为

$$u(\mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^{2N} f_j^\varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{a}_j|) \right) e^{i\theta_0(\mathbf{x})} \prod_{j=1}^{2N} \left(\frac{z - x_j - iy_j}{|z - x_j - iy_j|} \right)^{d_j}, \quad (1-14)$$

上式中 θ_0 是调和函数, $z = x + iy, (x_j, y_j)^T = \mathbf{a}_j^0, f_j^\varepsilon$ 是如下方程的解:

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{d_j^2}{r^2}f(r) - \frac{1}{\varepsilon^2}(f(r)^2 - 1)f(r) = 0, f(0) = 0, f(R_0) = 1. \quad (1-15)$$

在式 (1-15) 中, R_0 是不同量化涡旋 \mathbf{a}_j 两两之间以及量化涡旋与边界 $\partial\Omega$ 之间距离的最小值. 局部来看, 一个量化涡旋附近 (如 $B_{R_0}(\mathbf{a}_j)$) 的函数都形如 (可能差一个相位)

$$f_j^\varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{a}_j|) \left(\frac{z - x_j - iy_j}{|z - x_j - iy_j|} \right)^{d_j}, \quad (1-16)$$

上式也是如下方程的一个轴对称解

$$-\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2}(|u|^2 - 1)u = 0, \mathbf{x} \in B_{R_0}(\mathbf{x}_j). \quad (1-17)$$

此外, 根据 Bethuel 等^[22] 和 Bao 等^[23] 的研究, 只有在 $d = \pm 1$ 时, 一个含有量化涡旋的解在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时才是稳定的.

根据不同的边界条件, 一个函数 u 所具有的量化涡旋也具有不同的限制, 例如

对于狄利克雷边界条件式 (1-6), 有限制

$$\sum_{j=1}^M d_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\text{Im}(\bar{u}\nabla u)}{|u|^2} d\sigma. \quad (1-18)$$

而对于诺伊曼边界条件, 对量化涡旋环绕数的限制则几乎没有.

根据研究方程的不同, 有两大类问题: (1) 给定边界条件下, 如式 (1-13)、式 (1-17) 等稳态方程的量化涡旋在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下的分布规律. 这个问题等价于研究金兹堡-朗道泛函 E_Ω^ε 的极小值点. (2) 如式 (1-3)、式 (1-4)、式 (1-5) 等演化方程解的量化涡旋在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下的动力学规律, 也就是约化动力学规律 (reduced dynamical law, 简记为 RDL). 具体来说, 假定偏微分方程的解在 t 时刻有 M 个量化涡旋 $\mathbf{a}_j^\varepsilon(t)$, 而且 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{a}_j^\varepsilon(t) = \mathbf{a}_j(t)$, 其中 $\mathbf{a}_j(t), j = 1, \dots, M$ 是互不相同的点, 那么这些量化涡旋极限 $\mathbf{a}_j(t)$ 的动力学规律就是约化动力学规律.

1.1.3 相关文献综述

在数学领域, 偏微分方程量化涡旋的约化动力学规律自上世纪九十年代以来已经得到了广泛的研究.

在上世纪九十年代, Neu^[20,24]、Rubinstein^[25-27]、E^[28] 等人首先研究 $\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下的方程, 形式推导出了二维全平面或者三维全空间上不同方程的量化涡旋的约化动力学规律.

在上世纪九十年代中期, Bethuel 等^[22] 系统地研究了二维有界区域 Ω 上的满足狄利克雷边界条件式 (1-6) 的金兹堡-朗道泛函, 引入了规范调和映射和重整化能量. 二维有界区域上规范调和映射 $H_\Omega = H_\Omega(\mathbf{x})$ 是一类形如

$$H_\Omega(\mathbf{x}) = e^{i\theta_\Omega(\mathbf{x})} \prod_{j=1}^M \left(\frac{z - z_j}{|z - z_j|} \right)^{d_j} \quad (1-19)$$

的函数, 其中 θ_Ω 是一个实值调和函数, $z = x + iy, z_j = x_j + iy_j$. 重整化能量形如

$$W_\Omega(\mathbf{a}) = -\pi \sum_{1 \leq j \neq k \leq M} d_j d_k \ln |\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k| + \text{与 } \Omega \text{ 有关的余项}, \quad (1-20)$$

其中 $\mathbf{a}_j = (x_j, y_j)^T, \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M)$. Bethuel 等^[22] 证明了: (1) 在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 金兹堡-朗道泛函的极小值点 u^ε 将收敛到某一个规范调和映射 H_Ω ; (2) 基于边界条件, 所有 d_j 都是 +1 或都是 -1, 而且 M 等于 $|\int_{\partial\Omega} \text{Im}(\bar{g}_0 \nabla g_0) d\sigma| / 2\pi$; (3) \mathbf{a} 也是 W_Ω 的一个极小值点; (4) 在极小值点 u^ε 处系统的能量 $E(u^\varepsilon)$ 满足 $E_\Omega^\varepsilon(u^\varepsilon) = \pi M |\ln \varepsilon| + W_\Omega(\mathbf{a}) + O(1)$. 高维金兹堡-朗道泛函相关性质直到如今一直得到广泛研究^[29-34].

之后, Lin^[35]、Jerrard 等^[36]、Serfaty 等^[37]、Bethuel 等^[38] 相继通过不同角度给出了二维区域上的抛物型金兹堡-朗道方程的量化涡旋动力学规律的证明. 其中

Serfaty 采用的 Γ -收敛语言与相关方法是研究抛物型金兹堡-朗道方程量化涡旋的重要工具; 而 Bethuel 等人的结果首次将动力学规律延拓到了量化涡旋发生碰撞之后, 这种结果在其他的量化涡旋研究中是很少的. 此外, Jian 等^[39]、Liu^[40]、Bethuel 等^[41] 还证明了三维空间中抛物型金兹堡-朗道方程量化涡旋的动力学规律.

关于非线性薛定谔方程的量化涡旋动力学规律, Lin 等^[42]、Colliander 等^[43]、Bethuel 等^[44] 先后给出了二维区域上动力学规律的严格证明. 值得一提的是 Colliander 等人系统利用了重整化能量、规范调和映射等工具, 并且开发了应用于量化涡旋动力学研究的 Γ -收敛语言以及相关偏微分方程能量估计工具. 这一套方法是二维量化涡旋动力学研究的一种行之有效的方法. 之后 Jerrard 等^[45] 给出了关于 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时收敛性的更精确的研究. 然而高维空间中量化涡旋的动力学研究则局限于一系列特殊情况的研究之中, 例如螺旋涡线 (vortex helices) 解^[46-47]、近平行涡线 (nearly parallel vortex filaments) 解^[48] 以及环形涡线 (vortex ring) 解^[49] 等. 总之高维情形研究如今依然没有完全解决.

关于复金兹堡-朗道方程的研究相对来说较少, 就笔者所知, 目前只有 Miot^[50]、Kurzke 等^[51] 以及 Schneider 等^[52] 少数结果. 而关于非线性波方程和带波算子的非线性薛定谔方程结果也不多, Lin^[53]、Jerrard^[54] 分别研究了非线性波方程的量化涡旋动力学规律, 而 Yu^[55] 研究了带波算子的非线性薛定谔方程的约化动力学规律.

需要指出的是, 以上研究不涉及流形上的量化涡旋动力学研究, 而且都假设在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下量化涡旋的个数有限. Serfaty 等^[56-57] 研究了量化涡旋个数 $M = O(|\ln \varepsilon|)$ 或者 $M \gg |\ln \varepsilon|$ 等假设下的流场的动力学规律. 而 Colliander 等^[43]、Chen 等^[58]、Ignat 等^[59]、Canevari 等^[60] 给出了目前为数不多的在二维流形上的量化涡旋动力学研究结果. 此外, 还有关于非齐次 (inhomogeneous, 简言之就是将非线性项替换为 $(|u^\varepsilon|^2 - V(\mathbf{x}))u^\varepsilon/\varepsilon^2$) 方程的量化涡旋动力学研究^[61]、带磁场的金兹堡-朗道方程 (magnetic Ginzburg-Landau equation) 的量化涡旋动力学研究^[62-63] 以及方程组的量化涡旋动力学研究^[64-65], 本文不再一一详述.

在本节的最后, 我们简述一下量化涡旋动力学规律的数值模拟结果. Du、Bao、Tang 等利用有限元 (finite element method)、有限体积 (finite volume method)、时间分裂谱方法 (time-splitting spectral method) 计算模拟不同的偏微分方程的量化涡旋运动规律, 在数值模拟精度、关于 ε 收敛速度以及量化涡旋的稳定性等问题上给出了不少结果^[66-72].

1.2 研究内容

在本文中, 我们研究环面 $\mathbb{T}^2 := (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 上如下四个偏微分方程量化涡旋的约化动力学规律:

非线性薛定谔方程 (简称为 NLS)

$$i\partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0. \quad (1-21)$$

复金兹堡-朗道方程 (简记为 CGL)

$$k_\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \lambda i \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0. \quad (1-22)$$

非线性波方程 (简记为 NLW)

$$k_\varepsilon \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0. \quad (1-23)$$

带波算子的非线性薛定谔方程 (简记为 NLSW)

$$-i\partial_t u^\varepsilon + \mu k_\varepsilon \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0. \quad (1-24)$$

其中, 方程式 (1-21) 和式 (1-22) 的初值为

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, \quad (1-25)$$

方程式 (1-23) 和式 (1-24) 的初值为

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \partial_t u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_1^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2. \quad (1-26)$$

在式 (1-21) - 式 (1-26) 等式子中, $\lambda \in \mathbb{R}, \mu > 0, 0 < \varepsilon \ll 1$ 是常数, $k_\varepsilon = 1/|\ln \varepsilon|$, $\mathbf{x} = (x, y)^T$ 是空间变量, t 是时间变量, $u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ 都是复数值初值.

对于式 (1-21) - 式 (1-24) 这四个方程, 环面上的金兹堡-朗道泛函和动量是两个重要的量, 其具体定义如下:

对于一个 \mathbb{T}^2 上的复值函数 u , 其金兹堡-朗道泛函 $E^\varepsilon(u) = E_{\mathbb{T}^2}^\varepsilon(u)$ 定义为

$$E^\varepsilon(u) := \int_{\mathbb{T}^2} e^\varepsilon(u) dx, \quad e^\varepsilon(u(x)) := \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} (|u(x)|^2 - 1)^2, \quad (1-27)$$

动量 $\mathbf{Q}(u)$ 定义为

$$\mathbf{Q}(u) := \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(u(x)) dx, \quad \mathbf{j}(u(x)) \equiv (j_1(u(x)), j_2(u(x)))^T := \text{Im}(\overline{u(x)} \nabla u(x)). \quad (1-28)$$

金兹堡-朗道泛函也被称作能量 (energy), 相应地, $e^\varepsilon(u)$ 被称作能量密度 (density of energy). $\mathbf{j}(u)$ 也被称作流量 (current).

如文献综述中所述, 前人的工作主要集中于有界区域或者全空间等单连通区域上. 考虑到环面的非平凡基本群, 环面上量化涡旋研究会有如下两不同点:

(1) 所有量化涡旋的环绕数的和必为 0: 式 (1-10) 意味着一个量化涡旋的环绕

数必然是整数. 而且考虑到环面 \mathbb{T}^2 是一个紧致流形, 所以环面上一个复值函数所有量化涡旋的环绕数的和必然是 0. 此外, 从一系列研究^[20-21,23,73]中, 我们知道如果一个量化涡旋是稳定的, 那么它的环绕数必然是 +1 或者 -1. 这一点让我们可以假定环面上函数的量化涡旋的个数为 $2N$, 而且其环绕数为

$$d_1 = \cdots = d_N = 1, \quad d_{N+1} = \cdots = d_{2N} = -1. \quad (1-29)$$

(2) 系统的动量与量化涡旋位置有关: 如果假定初值 u_0^ε 的量化涡旋最后收敛到 $\mathbf{a}_1^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0$, 那么 $\mathbf{Q}_0 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon)$ 满足

$$\mathbf{Q}_0 \in 2\pi \mathbb{J} \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi \mathbb{Z}^2, \quad (1-30)$$

其中

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-31)$$

其证明见引理 2.2.

因为单连通区域上的函数没有如上的限制, 因而前人在单连通区域上的工作不能直接推广到环面上. 本文的主要工作就是给出环面上量化涡旋的约化动力学规律研究的方法和工具.

1.3 主要结果

在给出主要结果之前, 我们需要先讨论一下初值 u_0 的选取, 并给出一些记号.

对于一个良好的初值, 系统的能量需要满足

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - \left(2N \left(\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma \right) + W(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) \right) \right] = 0. \quad (1-32)$$

上式中 $\mathbf{q}_0 = -\mathbb{J}\mathbf{Q}_0$, γ 是由 Bethuel 等^[22]引入的一个常数, $W(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0)$ 是环面上的重整化能量 (renormalized energy). γ 的定义为

$$\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{v \in H_g^1(B_1(\mathbf{0}))} \int_{B_1(\mathbf{0})} e^\varepsilon(v) dx - \pi \ln \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad (1-33)$$

其中函数空间 $H_g^1(B_1(\mathbf{0}))$ 定义如下

$$H_g^1(B_1(\mathbf{0})) = \left\{ v \in H^1(B_1(\mathbf{0})) \mid v(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = \frac{x+iy}{|\mathbf{x}|} \text{ 对于 } \mathbf{x} \in \partial B_1(\mathbf{0}) \text{ 成立} \right\}. \quad (1-34)$$

对于一般的环面上 $2N$ 个互不相同的点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}$ 以及 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}), \mathbf{q} \in$

$2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbb{Z}^2$, 其重整化能量 $W(\mathbf{a}; \mathbf{q})$ 定义为^[59]

$$W(\mathbf{a}; \mathbf{q}) = -\pi \sum_{1 \leq j \neq k \leq 2N} d_j d_k F(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) + \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2, \quad (1-35)$$

其中 $F(\mathbf{x})$ 是如下方程的解:

$$\Delta F(\mathbf{x}) = 2\pi(\delta(\mathbf{x}) - 1), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, \quad \text{且} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} (F(\mathbf{x}) - \ln |\mathbf{x}|) = 0. \quad (1-36)$$

上式中, δ 是狄拉克- δ 函数 (Dirac- δ function) .

这种初值是广泛存在的, 例如

$$u_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^{2N} f_\varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{a}_j^0|) \right) e^{i\theta_0(\mathbf{x})} \prod_{j=1}^{2N} \left(\frac{z - x_j - iy_j}{|z - x_j - iy_j|} \right)^{d_j}, \quad (1-37)$$

上式中 θ_0 是调和函数, $z = x + iy$, $(x_j, y_j)^T = \mathbf{a}_j^0$, f_ε 是如下方程的解:

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{1}{r^2} f(r) - \frac{1}{\varepsilon^2} (f(r)^2 - 1) f(r) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(R_0) = 1, \quad (1-38)$$

其中 $R_0 = \frac{1}{4} \min_{1 \leq k < l \leq 2N} |\mathbf{a}_k^0 - \mathbf{a}_l^0|$. 值得一提的是, 通过 Ignat 等^[74] 的结果, 在 $(0, R_0]$ 上 f_ε 局部一致收敛到 1, 因而 u_0^ε 会在量化涡旋之外局部一致收敛到

$$e^{i\theta_0(\mathbf{x})} \prod_{j=1}^{2N} \left(\frac{z - x_j - iy_j}{|z - x_j - iy_j|} \right)^{d_j}. \quad (1-39)$$

这种类型的函数就是环面上的规范调和映射 (canonical harmonic map), 其具体定义参见式 (2-41) .

我们引入如下记号:

$$(\mathbb{T}^2)_*^{2N} := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)^{2N} \mid \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_k \text{ 对任意 } 1 \leq j < k \leq 2N \text{ 成立}\}. \quad (1-40)$$

对任意 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 以及 $\mathbf{q} \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbb{Z}^2$, 可以引入如下带有参数 ε 的重整化能量:

$$W_\varepsilon(\mathbf{a}; \mathbf{q}) = 2N \left(\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} + \gamma \right) + W(\mathbf{a}; \mathbf{q}), \quad (1-41)$$

其中重整化能量 W 如式 (1-35) 所示.

对于 \mathbb{T}^2 上函数 u , 其雅可比行列式 (Jacobian) 定义为:

$$J(u(\mathbf{x})) := \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbb{J}j(u(\mathbf{x}))) = \text{Im}(\partial_x \bar{u} \partial_y u). \quad (1-42)$$

对任意 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}^2$, 定义

$$\delta_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) := \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (1-43)$$

本文的主要结果由如下四个小节分别描述:

1.3.1 关于非线性薛定谔方程

如第 1.1.1 小节所述, NLS 被用作超流的唯相学模型, 此外, NLS 也被用于描述玻色-爱因斯坦凝聚^[15-16,42]. NLS 量化涡旋的约化动力学规律定理如下:

定理 1.1 (NLS 的约化动力学规律): 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi\mathbb{Z}^2$ 使得初值 (式 (1-25)) 中 u_0^ε 满足

$$J(u_0^\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0}, \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2) := [C^1(\mathbb{T}^2)]', \quad (1-44)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon) = \mathbf{Q}_0 = \mathbb{J}\mathbf{q}_0, \quad (1-45)$$

以及式 (1-32). 则可以找到 $T > 0$ 以及 $2N$ 个李普希茨 (Lipschitz) 的路径 $\mathbf{a}_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (1-25) 的方程式 (1-21) 的解 u^ε 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (1-46)$$

其中 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律 (简记如下方程为 NLSRDL):

$$\dot{\mathbf{a}}_j = -d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})) = 2\mathbb{J} \sum_{1 \leq k \leq 2N, k \neq j} d_k \nabla F(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) - 2\mathbf{Q}_0, \quad t > 0, \quad (1-47)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j(t) + 2\pi\mathbb{Z}^2, \quad (1-48)$$

而且方程式 (1-47) 初值为

$$\mathbf{a}_j(0) = \mathbf{a}_j^0, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (1-49)$$

1.3.2 关于复金兹堡-朗道方程

从形式上来说, CGL 式 (3-1) 是 NLS 式 (1-21) 和金兹堡-朗道方程式 (1-4) 的混合. CGL 在物理学领域作为一个振幅方程 (amplitude equation) 被用于描述时空弱非线性现象 (weakly nonlinear spatiotemporal phenomena)^[75-76]. 同时也有工作将其用于描述一些生态系统中的多物种竞争^[77]. CGL 的约化动力学规律定理如下:

定理 1.2 (CGL 的约化动力学规律): 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi\mathbb{Z}^2$ 使得初值 (式 (1-25)) 中 u_0^ε 满足式 (1-44)、式 (1-45) 以及式 (1-32), 则可以找到 $T > 0$ 以及 $2N$ 个李普希茨的路径 $\mathbf{a}_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (1-25) 的方程式 (1-22) 的解 u^ε 满足式 (1-46), 而且 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$)

满足如下约化动力学规律（以下方程简记为 CGLRDL）：

$$\dot{\mathbf{a}}_j - \lambda d_j \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j = -\frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})), \quad t > 0, \quad (1-50)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足式 (1-48)，而且方程式 (1-50) 初值由式 (1-49) 给出。

1.3.3 关于非线性波方程

非线性波方程的约化动力学规律结果为如下定理：

定理 1.3 (NLW 的约化动力学规律)： 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi \mathbb{Z}^2$ 使得初值（式 (1-26)）中 $u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ 满足式 (1-44)、式 (1-45)、式 (1-32) 以及

$$k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} |u_1^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \rightarrow 0. \quad (1-51)$$

则可以找到 $T > 0$ 以及 $2N$ 个 $C^{1,1}$ -路径 $\mathbf{a}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (1-26) 的方程式 (1-23) 的解 u^ε 满足式 (1-46)，而且 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律（该方程简记为 NLWODE）：

$$\ddot{\mathbf{a}}_j = -\frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})), \quad t > 0, \quad (1-52)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足式 (1-48)，而且方程式 (1-52) 初值如下：

$$\mathbf{a}_j(0) = \mathbf{a}_j^0, \quad \dot{\mathbf{a}}_j(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (1-53)$$

1.3.4 关于带波算子的非线性薛定谔方程

从形式上来看，NLSW 是 NLS 和 NLW 的混合。NLSW 被用于研究克莱因-戈尔登 (Klein-Gordon) 方程的非相对论极限 (nonrelativistic limit)^[78-80]，等离子体 (plasma) 中的朗缪尔波 (Langmuir wave) 包络近似 (envelope approximation)^[81-82] 以及光子子弹 (light bullet) 的正弦-戈尔登方程 (sine-Gordon equation) 调制平面脉冲近似 (modulated planar pulse approximation)^[83-84]。在 $\mu \rightarrow 0$ ，也就是所谓非相对论极限下，NLSW 收敛到 NLS^[78-79,82,85]。NLSW 的约化动力学规律为如下定理：

定理 1.4 (NLSW 的约化动力学规律)： 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi \mathbb{Z}^2$ 使得初值（式 (1-26)）中 $u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ 满足式 (1-44)、式 (1-45)、式 (1-32) 以及式 (1-51)，则可以找到 $T > 0$ 以及 $2N$ 个 $C^{1,1}$ -路径 $\mathbf{a}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (1-26) 的方程式 (1-24) 的解 u^ε 满足式 (1-46)，而且 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律（以下方程简记为 NLSWRDL）：

$$\mu \ddot{\mathbf{a}}_j + d_j \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j = -\frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})), \quad t > 0, \quad (1-54)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足式 (1-48)，而且方程式 (1-54) 初值由式 (1-53) 给出。

1.3.5 本文主要创新点

本文主要结果,即定理 1.1-1.4 都是全新的. 我们证明了环面上多个重要偏微分方程量化涡旋的约化动力学规律, 其是前人的适用于有界区域或者全空间的相关结果(参考第 1.1.3 小节)的推广. 考虑到环面上的偏微分方程等价于一个带有周期边界条件的正方形区域上的方程, 本文所考虑的条件比前人所用的狄利克雷或诺伊曼边界条件弱很多. 除此之外, 我们在证明相关结论时对很多重要的函数作出了适用于环面的修改, 如规范调和映射、重整化能量等. 最后我们证明了相关偏微分方程解 u^ϵ 的一些新性质, 例如极限动量 $\mathbf{Q}^*(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{Q}(u^\epsilon(t)) dx$ 的连续性.

1.4 论文结构安排

本文剩余部分安排如下:

在第 2 章中, 我们将给出 NLS 量化涡旋的约化动力学规律的证明. 我们的证明事实上受到了 Colliander 等^[43]、Ignat 等^[59]、Canevari 等^[60]等工作的启发. 在第 2.1 节, 我们将研究环面上的 S^1 -值函数(即函数模长几乎处处是 1 的复值函数), 介绍环面上的规范调和映射和重整化能量. 在这一节我们将证明环面上复值函数动量与量化涡旋位置的关系式(2-29). 这一关系式影响到了环面上规范调和映射的定义, 使得其相对于有界区域等单连通区域的规范调和映射多了一个与方程初值动量极限有关的相位上的调整, 参考式(2-41). 我们还会研究规范调和映射导数乘积的积分及其与重整化能量梯度之间的关系. 接下来在第 2.2 节, 我们首先证明 $J(u^\epsilon)$ 的收敛性, 得出 NLS 的量化涡旋收敛到某几条路径 $\mathbf{b}_j(t)$ 之上. 利用 $\mathbf{b}_j(t)$, 可以得到一个规范调和映射 $u_*(\mathbf{x}, t)$, 该节剩下的部分就是在研究方程的解 u^ϵ 和 u_* 的相近程度. 重点在于 $j(u^\epsilon)$ 会在合适的意义下收敛到 $j(u_*)$ (引理 2.9), 而 $j(u^\epsilon) - j(u_*), \nabla |u^\epsilon|$ 等在挖掉量化涡旋一个邻域后剩下区域上的 L^2 -范数比较小(引理 2.11). 接下来我们将在第 2.3.1 小节通过已有的能量估计证明 \mathbf{b}_j 满足式(1-47), 具体方法是先假设 \mathbf{a} 是式(1-47)的解, 考虑初值自然有 $|\mathbf{a}_j(0) - \mathbf{b}_j(0)| = 0$, 然后利用第 2.2 节得到的各种估计证明关于 $|\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{b}_j(t)|$ 的格朗沃尔不等式(Gronwall inequality)从而证明结论. 最后, 我们将在第 2.3.2 小节与第 2.3.3 小节给出约化动力学规律的首次积分与一些数值模拟结果.

在第 3 章到第 5 章中, 我们将给出 CGL、NLW、NLSW 的量化涡旋的动力学规律. 其整体思路与 NLS 量化涡旋动力学规律证明类似, 但具体细节不同, 需要根据不同的方程采用相应的技巧.

在第 6 章中, 我们将给本文结果给一个简要的总结.

第 2 章 非线性薛定谔方程量化涡旋的约化动力学规律

在本章中,我们将考虑非线性薛定谔方程(简记为 NLS)

$$i\partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (2-1)$$

的量化涡旋动力学规律,其中方程式(2-1)的初值为

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2. \quad (2-2)$$

此外,动量 \mathbf{Q} 、流量 \mathbf{j} 由式(1-28)定义,能量 E^ε 、能量密度 e^ε 由式(1-27)定义,重整化能量 W 、带参数 ε 的重整化能量 W_ε 、雅可比行列式 J 以及 $(\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 等分别由式(1-35)、式(1-41)、式(1-42)、式(1-40)等定义,在此不再赘述.

为了方便读者,我们将主要结果,也即定理 1.1,复述如下:

定理 2.1 (NLS 的约化动力学规律): 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi\mathbb{Z}^2$ 使得初值(式(2-2))中 u_0^ε 满足

$$J(u_0^\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0}, \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2) := [C^1(\mathbb{T}^2)]', \quad (2-3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon) = \mathbf{Q}_0 = \mathbb{J}\mathbf{q}_0, \quad (2-4)$$

以及

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} [E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0)] = 0. \quad (2-5)$$

则存在 $T > 0$ 以及 $2N$ 个李普希茨的路径 $\mathbf{a}_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式(2-2)的方程式(2-1)的解 u^ε 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (2-6)$$

其中 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律(简记如下方程为 NLSRDL):

$$\dot{\mathbf{a}}_j = -d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})) = 2\mathbb{J} \sum_{1 \leq k \leq 2N, k \neq j} d_k \nabla F(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) - 2\mathbf{Q}_0, \quad t > 0, \quad (2-7)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j(t) + 2\pi\mathbb{Z}^2, \quad (2-8)$$

而且方程式 (2-7) 初值为

$$\mathbf{a}_j(0) = \mathbf{a}_j^0, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (2-9)$$

包含定理 2.1 证明在内的本章主要结果基于本人与包维柱教授和简怀玉教授的相关文章^[86].

2.1 规范调和映射与重整化能量

如引言所述, 规范调和映射和重整化能量在我们研究量化涡旋的动力学规律时起到了重要作用. 规范调和映射本身是一种特殊的 S^1 -值函数 (即函数值模长几乎处处等于 1 的函数), 所以我们在正式研究 NLS 的量化涡旋运动规律之前, 先研究 S^1 -值函数的性质, 给出规范调和映射的定义以及它与重整化能量之间的联系. 本节所述内容并不局限于 NLS 的研究, 在后面几章会反复用到.

在本节, 我们引入如下记号.

对于复数 z, w , 定义

$$\langle z, w \rangle := \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}. \quad (2-10)$$

对于复值向量 $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T, \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T \in \mathbb{C}^2$, 定义

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle := \langle z_1, w_1 \rangle + \langle z_2, w_2 \rangle. \quad (2-11)$$

对于 \mathbb{T}^2 上函数 u , 回顾 $\mathbf{j}(u)$ 的定义式 (1-28), 通过直接计算可以得到若 $u(\mathbf{x}) \neq 0$, 则

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x})}{|u(\mathbf{x})|} \nabla |u(\mathbf{x})| + \frac{i u(\mathbf{x}) \mathbf{j}(u(\mathbf{x}))}{|u(\mathbf{x})| |u(\mathbf{x})|}. \quad (2-12)$$

因而

$$\begin{cases} \langle \partial_x u, \partial_x u \rangle &= \frac{(j_1(u))^2}{|u|^2} + (\partial_x |u|)^2, \\ \langle \partial_x u, \partial_y u \rangle &= \frac{j_1(u)j_2(u)}{|u|^2} + \partial_x |u| \partial_y |u|, \\ \langle \partial_y u, \partial_y u \rangle &= \frac{(j_2(u))^2}{|u|^2} + (\partial_y |u|)^2. \end{cases} \quad (2-13)$$

对于任意 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$, 定义

$$r(\mathbf{a}) := \frac{1}{4} \min_{1 \leq j < k \leq 2N} |\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k|. \quad (2-14)$$

进而, 对于任意 $\rho < r(\mathbf{a})$, 可以定义

$$\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a}) := \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{2N} B_\rho(\mathbf{a}_j), \quad \mathbb{T}_*^2(\mathbf{a}) := \bigcup_{\rho > 0} \mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a}) = \mathbb{T}^2 \setminus \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}\}. \quad (2-15)$$

对任意 $\rho > 0$, 定义

$$(\mathbb{T}^2)_\rho^{2N} := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)^{2N} \mid |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k| > \rho, \forall 1 \leq j < k \leq 2N\}. \quad (2-16)$$

回顾 F 定义式 (1-36), 对任意 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 定义

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{2N} d_j F(\mathbf{x} - \mathbf{a}_j). \quad (2-17)$$

对于复数值函数 u , 记它的黑塞矩阵 (Hessian matrix) 为 $\text{Hess } u$, 同时定义 $\nabla u \otimes \nabla u$ 与 $\nabla \cdot (\nabla u \otimes \nabla u)$ 分别为

$$\nabla u \otimes \nabla u := \begin{pmatrix} \langle \partial_x u, \partial_x u \rangle & \langle \partial_x u, \partial_y u \rangle \\ \langle \partial_y u, \partial_x u \rangle & \langle \partial_y u, \partial_y u \rangle \end{pmatrix}, \quad (2-18)$$

$$\nabla \cdot (\nabla u \otimes \nabla u) = \begin{pmatrix} \partial_x \langle \partial_x u, \partial_x u \rangle + \partial_y \langle \partial_y u, \partial_x u \rangle \\ \partial_x \langle \partial_x u, \partial_y u \rangle + \partial_y \langle \partial_y u, \partial_y u \rangle \end{pmatrix}. \quad (2-19)$$

2.1.1 环面上的 \mathbb{S}^1 -值函数

引理 2.1: 如果 \mathbb{S}^1 -值函数 $u \in H_{loc}^1(\mathbb{T}^2 \setminus \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}\}) \cap W^{1,1}(\mathbb{T}^2)$ 满足

$$J(u) = \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (2-20)$$

其中 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$, 那么

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(u) dx \in 2\pi \mathbb{J} \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbb{Z}^2. \quad (2-21)$$

证明 不失一般性, 可以假设 $\mathbf{a}_j = (x_j, y_j)^T \in (0, 1)^2$. 因为 u 是一个 \mathbb{S}^1 -值函数, 所以记

$$u(\mathbf{x}) = e^{i\Theta(\mathbf{x})}. \quad (2-22)$$

上式与式 (1-28) 可推出

$$\mathbf{j}(u) = \text{Im}(\bar{u} \nabla u) = \nabla \Theta. \quad (2-23)$$

因为 u 是 \mathbb{T}^2 上的函数, 式 (2-23) 可推导出存在 $k_1 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\int_0^1 j_1(u(x, 0)) dx = \int_0^1 \partial_x \Theta(x, 0) dx = \Theta(1, 0) - \Theta(0, 0) = 2\pi k_1. \quad (2-24)$$

通过式 (2-20) 以及雅可比行列式定义式 (1-42), 对任意 $y \in [0, 1]$ 以及 $U_y =$

$[0, 1] \times [0, y]$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 j_1(u(x, 0))dx - \int_0^1 j_1(u(x, y))dx &= \int_{\partial U_y} \mathbf{j}(u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\tau} d\sigma \\
 &= \int_{U_y} \nabla \cdot (\mathbb{J} \mathbf{j}(u(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} = 2\pi \int_{U_y} \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{a_j} d\mathbf{x} \\
 &= 2\pi \sum_{\substack{1 \leq j \leq 2N \\ y_j < y}} d_j = 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \chi_{[y_j, 1]}(y). \tag{2-25}
 \end{aligned}$$

式 (2-24)、式 (2-25) 以及式 (1-29) 可推导出

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}^2} j_1(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} &= \int_0^1 \int_0^1 j_1(u(\mathbf{x})) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(2\pi k_1 - 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \chi_{[y_j, 1]}(y) \right) dy \\
 &= 2\pi k_1 - 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j (1 - y_j) = 2\pi k_1 + 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j y_j - 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \\
 &= 2\pi k_1 + 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j y_j. \tag{2-26}
 \end{aligned}$$

与式 (2-26) 的证明类似, 存在 $k_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\int_{\mathbb{T}^2} j_2(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 2\pi k_2 - 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j x_j = \int_0^1 j_2(u(0, y)) dy - 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j x_j. \tag{2-27}$$

结合式 (2-26) 以及式 (2-27), 可以得到式 (2-21). ■

以上引理有如下推论:

引理 2.2: 如果 $u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{T}^2)$ 是一列函数, 其满足存在 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 以及 $C > 0$ 使得

$$J(u^\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad E^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq 2N\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} + C, \tag{2-28}$$

而且极限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(u^\varepsilon)$ 存在, 那么

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(u^\varepsilon) \in 2\pi \mathbb{J} \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbb{Z}^2. \tag{2-29}$$

在正式给出引理 2.2 的证明之前, 我们先陈述如下引理, 其由 Colliander 和 Jerard 给出, 证明参考 Colliander 等^[43] 对其定理 1.4.3 和定理 1.4.4 的证明.

引理 2.3 (Colliander-Jerrard): 假设 $u \in H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$, 而且存在 $\mathbf{a}^0 = (\mathbf{a}_1^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)^{2N}_*$ 以及 $\varepsilon < r(\mathbf{a}^0), \gamma_1 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\left\| J(u) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{200} r(\mathbf{a}^0), \quad E^\varepsilon(u) \leq 2N\pi \ln \frac{r(\mathbf{a}^0)}{\varepsilon} + \gamma_1. \quad (2-30)$$

那么存在 $\mathbf{a}_j \in B_{r(\mathbf{a}^0)/2}(\mathbf{a}_j^0), j = 1, \dots, 2N$ 使得

$$\left\| k_\varepsilon e^\varepsilon(u) - \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{a}_j} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq C(\gamma_1) k_\varepsilon, \quad (2-31)$$

$$\left\| J(u) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq f_{\gamma_1}(\varepsilon). \quad (2-32)$$

上式中 f_{γ_1} 满足 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\gamma_1}(\varepsilon) = 0$. 此外, 对满足 $0 < \rho < r(\mathbf{a}^0)/2$ 的任意 ρ 以及 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N})$, 下式成立:

$$\int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} e^\varepsilon(u) dx \leq C(\rho, \gamma_1), \quad \int_{B_\rho(\mathbf{a}_j)} e^\varepsilon(u) dx \geq \pi \ln \frac{\rho}{\varepsilon} - C(\gamma_1). \quad (2-33)$$

最后, 对于任意 $p \in [1, 2)$, 有如下估计:

$$\|j(u)\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p, \gamma_1), \quad \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} \leq C(p, \gamma_1). \quad (2-34)$$

引理 2.2 的证明如下:

证明 通过式 (2-28) 以及引理 2.3 可知 $\|u^\varepsilon\|_{W^{1,3/2}(\mathbb{T}^2)}$ 是一致有界的:

$$\|u^\varepsilon\|_{W^{1,3/2}(\mathbb{T}^2)} \leq C. \quad (2-35)$$

因此, 存在函数 $u \in W^{1,3/2}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^3(\mathbb{T}^2)$ 使得

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ 于 } L^3(\mathbb{T}^2), \quad \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \text{ 于 } L^{3/2}(\mathbb{T}^2). \quad (2-36)$$

上式与式 (1-28) 可推导出

$$j(u^\varepsilon) \rightharpoonup j(u) \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2). \quad (2-37)$$

此外, 式 (2-28) 可推导出

$$\| |u^\varepsilon|^2 - 1 \|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq 4\varepsilon^2 E^\varepsilon(u^\varepsilon) \rightarrow 0. \quad (2-38)$$

因此, $|u^\varepsilon| \rightarrow 1$. 再考虑到式 (2-36), 就会有 $|u| = 1$, 即 u 是一个 \mathbb{S}^1 -值函数.

对任意 $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^2)$, 结合雅可比行列式定义式 (1-42) 以及式 (2-28) 可推出

$$\int_{\mathbb{T}^2} \varphi J(u) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} (\mathbb{J}\nabla\varphi) \cdot j(u) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} (\mathbb{J}\nabla\varphi) \cdot j(u^\varepsilon) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi J(u^\varepsilon) dx = \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \varphi(\mathbf{a}_j). \quad (2-39)$$

因此 u 是一个满足式 (2-20) 的 S^1 -值函数. 定理 2.1 意味着 $\int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(u) dx$ 满足式 (2-21). 再考虑到式 (2-37), 我们有

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(u^\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(u) dx. \quad (2-40)$$

上式结合式 (2-21) 可推出式 (2-29). ■

2.1.2 规范调和映射

规范调和映射是一类特殊的 S^1 -值函数. 自从其被 Bethuel 等^[22]提出以来, 其一直在量化涡旋动力学规律研究中有着重要作用. 本小节将构造环面上的规范调和映射, 并介绍其基本性质.

定义 2.1 (规范调和映射): 对任意 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2N}) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$, $\mathbf{q} \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi\mathbb{Z}^2$, 固定一个 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}_*^2(\mathbf{a})$, 然后定义规范调和映射

$$H = H(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{q}) := e^{i(\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + (\mathbb{J}\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x})}, \quad (2-41)$$

其中 \mathbf{x} 的坐标选取满足 $(x, y)^T \in [0, 1]^2$, $\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 定义如下: 取定 $\mathbf{x}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2N}$ 坐标分别为 $(x_0, y_0)^T, (x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T, \dots, (x_{2N}, y_{2N})^T \in [0, 1]^2$, 再取一条连接 $(x_0, y_0)^T$ 与 $(x, y)^T$ 的不自相交的曲线 $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Omega_*(\mathbf{a}) := [0, 1]^2 \setminus \{(x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T, \dots, (x_{2N}, y_{2N})^T\}$, 则 $\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 定义为

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \int_0^1 (-\mathbb{J}\nabla\Phi_{\mathbf{a}}(\alpha(s))) \cdot \dot{\alpha}(s) ds. \quad (2-42)$$

引理 2.4: 由式 (2-41) 给出的规范调和映射 $H = H(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{q})$ 是良定义的, 而且 $H \in C_{loc}^\infty(\mathbb{T}_*^2(\mathbf{a})) \cap W^{1,1}(\mathbb{T}^2)$ 以及

$$\mathbf{j}(H(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{q})) = -\mathbb{J}\nabla\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \mathbb{J}\mathbf{q}, \quad |H(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{q})| = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{T}_*^2(\mathbf{a}). \quad (2-43)$$

证明 依然记 \mathbf{a}_j 的坐标为 $(x_j, y_j)^T \in [0, 1]^2, 1 \leq j \leq 2N$.

首先需要证明 H 在 $\Omega_*(\mathbf{a})$ 上是良定义的. 对任意 $\mathbf{x} \in \Omega_*(\mathbf{a})$, 如果存在两条连接 $(x_0, y_0)^T$ 与 $(x, y)^T$ 的曲线 α_1, α_2 , 并记利用两条曲线定义的 $\Theta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ 分别为 Θ_1, Θ_2 . 考虑由这 α_1, α_2 两条曲线围起来的区域 U , 则

$$\begin{aligned} \Theta_1 - \Theta_2 &= \int_0^1 (-\mathbb{J}\nabla\Phi_{\mathbf{a}}(\alpha_1)) \cdot \dot{\alpha}_1(s) ds - \int_0^1 (-\mathbb{J}\nabla\Phi_{\mathbf{a}}(\alpha_2)) \cdot \dot{\alpha}_2(s) ds \\ &= \int_{\partial U} \nabla\Phi_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_U \Delta\Phi_{\mathbf{a}} dx = 2\pi \sum_{\mathbf{a}_j \in U} d_j, \end{aligned} \quad (2-44)$$

将上式带入 H 的定义式 (2-41), 可以得到 $e^{i(\Theta_1 + (\mathbb{J}\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x})} = e^{i(\Theta_2 + (\mathbb{J}\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x})}$, 因而 H 在

$\Omega_*(\mathbf{a})$ 上是良定义的. 而且根据 H 的定义式 (2-41) 以及 \mathbf{j} 的定义式 (1-28), 可以得到式 (2-43) 以及

$$\nabla H = iH\mathbf{j}(H). \quad (2-45)$$

接下来我们证明 H 是 $\mathbb{T}_*^2(\mathbf{a})$ 上良定义的函数. 记

$$\Theta_{\mathbf{a}}(x, 1) = \lim_{y \rightarrow 1^-} \Theta_{\mathbf{a}}(x, y), \quad \Theta_{\mathbf{a}}(1, y) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \Theta_{\mathbf{a}}(x, y). \quad (2-46)$$

由式 (2-42) 可知

$$\nabla \Theta_{\mathbf{a}} = -\mathbb{J} \nabla \Phi_{\mathbf{a}}, \quad (2-47)$$

进而对任意 $x \in [0, 1]$,

$$\Theta_{\mathbf{a}}(x, 1) - \Theta_{\mathbf{a}}(x, 0) = \int_0^1 \partial_x \Phi_{\mathbf{a}}(x, y) dy. \quad (2-48)$$

由 $\Phi_{\mathbf{a}}$ 的定义式 (2-17) 以及 $\Phi_{\mathbf{a}} \in C_{loc}^\infty(\mathbb{T}_*^2(\mathbf{a}))$ 可以推出对于任意 $x \in [0, 1]$ 以及 $\tilde{U}_x := [0, x] \times [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \partial_x \Phi_{\mathbf{a}}(x, y) dy - \int_0^1 \partial_x \Phi_{\mathbf{a}}(0, y) dy &= \int_{\tilde{U}_x} \Delta \Phi_{\mathbf{a}} dx \\ &= 2\pi \sum_{\mathbf{a}_j \in \tilde{U}_x} d_j = 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \chi_{[x_j, 1]}(x). \end{aligned} \quad (2-49)$$

由式 (2-49) 可以得到

$$\int_{\mathbb{T}^2} \partial_x \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) dx = \int_0^1 \partial_x \Phi_{\mathbf{a}}(0, y) dy + 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j (1 - x_j). \quad (2-50)$$

根据 $\Phi_{\mathbf{a}}$ 定义式 (2-17), F 的定义式 (1-36) 以及式 (1-29) 可知

$$\int_{\mathbb{T}^2} \partial_x \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) dx = \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{j=1}^{2N} d_j \partial_x F(\mathbf{x} - \mathbf{a}_j) dx = \left(\sum_{j=1}^{2N} d_j \right) \int_{\mathbb{T}^2} \partial_x F(\mathbf{x}) dx = 0. \quad (2-51)$$

结合式 (2-48)、式 (2-49)、式 (2-50)、式 (2-51) 与式 (1-29), 我们有

$$\Theta_{\mathbf{a}}(x, 1) - \Theta_{\mathbf{a}}(x, 0) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j x_j + 2\pi\mathbb{Z}. \quad (2-52)$$

将上式代入式 (2-41), 注意到 $\mathbf{q} \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi\mathbb{Z}^2$, 可知对任意 $x \in [0, 1]$,

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} H((x, y)^T; \mathbf{a}, \mathbf{q}) = e^{i(\Theta(x, 1) + (\mathbb{J}\mathbf{q}) \cdot (x, 1)^T)} = e^{i(\Theta(x, 0) + (\mathbb{J}\mathbf{q}) \cdot (x, 0)^T)} = H((x, 0)^T; \mathbf{a}, \mathbf{q}). \quad (2-53)$$

同样地, 对任意 $y \in [0, 1]$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} H((x, y)^T; \mathbf{a}, \mathbf{q}) = H((0, y)^T; \mathbf{a}, \mathbf{q}). \quad (2-54)$$

也就是说 H 是 $\mathbb{T}_*^2(\mathbf{a})$ 上连续函数. 再根据式 (2-45) 与式 (2-43), 可以得出 $H \in C_{loc}^\infty(\mathbb{T}_*^2(\mathbf{a})) \cap W^{1,1}(\mathbb{T}^2)$. ■

引理 2.5: 由定义 2.1 给出的规范调和映射映射 H 满足

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(H) = 0, \quad \nabla \cdot (\mathbb{J} \mathbf{j}(H)) = 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j}, \quad \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(H) dx = \mathbb{J} \mathbf{q}. \quad (2-55)$$

证明 式 (2-55) 是式 (2-43) 以及 $\Phi_{\mathbf{a}}$ 的定义式 (2-17) 的直接推论. ■

2.1.3 重整化能量的梯度

回顾重整化能量 W 的定义式 (1-35), 注意到 \mathbf{q} 有限制 $\mathbf{q} \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbb{Z}^2$. 因此, 在 $\mathbf{a} \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 的足够小的邻域内, 可以找到 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ 使得

$$\mathbf{q} = 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbf{k}. \quad (2-56)$$

结合上式与式 (1-35) 就会有

$$W(\mathbf{a}; \mathbf{q}) = -\pi \sum_{1 \leq k \neq l \leq 2N} d_k d_l F(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_l) + \frac{1}{2} \left| 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbf{k} \right|^2. \quad (2-57)$$

在式 (2-57) 两边对 \mathbf{a}_j 求梯度:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}) &= -2\pi \sum_{k=1, k \neq j}^{2N} d_k d_j \nabla F(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) + 2\pi d_j \left(2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbf{k} \right) \\ &= 2\pi d_j \left(- \sum_{k=1, k \neq j}^{2N} d_k \nabla F(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) + \mathbf{q} \right). \end{aligned} \quad (2-58)$$

由式 (2-58) 以及 F 的定义式 (1-36) 可知, 在 $\rho > 0$ 足够小时, W 在 $(\mathbb{T}^2)_\rho^{2N}$ 上是李普希茨函数, 即存在一个常数 $C_\rho(\mathbf{q})$ 使得

$$\|W(\mathbf{a}; \mathbf{q})\|_{C^1((\mathbb{T}^2)_\rho^{2N})} \leq C_\rho(\mathbf{q}). \quad (2-59)$$

2.1.4 重整化能量与规范调和映射的联系

引理 2.6: 给定 $\mathbf{a} \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$, $\mathbf{q} \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j + 2\pi \mathbb{Z}^2$, 假设 $H = H(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{q})$ 是由定义 2.1 给出的规范调和函数, 则对任意 $\rho < r(\mathbf{a})$,

$$\int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} e^\varepsilon(H) dx = 2N\pi \ln \frac{1}{\rho} + W(\mathbf{a}; \mathbf{q}) + O(\rho^2). \quad (2-60)$$

证明 考虑到式 (2-45) 以及式 (2-43), 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} e^\varepsilon(H) d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} |\mathbf{j}(H)|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} |\nabla\Phi_{\mathbf{a}} - \mathbf{q}|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} |\nabla\Phi_{\mathbf{a}}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} \mathbf{q} \cdot \nabla\Phi_{\mathbf{a}} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} |\mathbf{q}|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2-61)$$

在 $B_\rho(\mathbf{a}_j)$ 上定义

$$\Phi_j(\mathbf{x}) := \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - d_j \ln |\mathbf{x} - \mathbf{a}_j| = \sum_{k=1, k \neq j}^{2N} d_k F(\mathbf{x} - \mathbf{a}_k) + d_j (F(\mathbf{x} - \mathbf{a}_j) - \ln |\mathbf{x} - \mathbf{a}_j|). \quad (2-62)$$

利用 $\Phi_{\mathbf{a}}$ 定义, 可以知道 $\Phi_j(\mathbf{x})$ 在 $B_\rho(\mathbf{a}_j)$ 上是调和函数. 则式 (2-61) 右手边第一项可写作

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} |\nabla\Phi_{\mathbf{a}}|^2 d\mathbf{x} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \frac{\partial\Phi_{\mathbf{a}}}{\partial\mathbf{n}} \Phi_{\mathbf{a}} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} \Delta\Phi_{\mathbf{a}} \Phi_{\mathbf{a}} d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \left(d_j \frac{1}{\rho} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{n}} \right) (d_j \ln \rho + \Phi_j) d\sigma \\ &= 2N\pi \ln \frac{1}{\rho} - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \Phi_j(\mathbf{a}_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} \int_{B_\rho(\mathbf{a}_j)} |\nabla\Phi_j|^2 d\mathbf{x} \\ &= 2N\pi \ln \frac{1}{\rho} - \pi \sum_{1 \leq k \neq l \leq 2N} d_k d_l F(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_l) + O(\rho^2). \end{aligned} \quad (2-63)$$

式 (2-61) 右手边第二项可写作

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} \mathbf{q} \cdot \nabla\Phi_{\mathbf{a}} d\mathbf{x} &= -\sum_{j=1}^{2N} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \Phi_{\mathbf{a}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\sum_{j=1}^{2N} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} (d_j \ln \rho + \Phi_j) \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= -\sum_{j=1}^{2N} \int_{B_\rho(\mathbf{a}_j)} \mathbf{q} \cdot \nabla\Phi_j d\mathbf{x} = O(\rho^2). \end{aligned} \quad (2-64)$$

直接计算式 (2-61) 右手边第三项可得

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{a})} |\mathbf{q}|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2 (1 - 2N\pi\rho^2). \quad (2-65)$$

将式 (2-63) - 式 (2-65) 代入式 (2-61), 就立刻得到式 (2-60). ■

引理 2.7: 假设 H 是由定义 2.1 给出的规范调和映射, $\eta \in C_0^\infty(B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j))$, 而且存在 $0 < R < r(\mathbf{a}), \mathbf{p} = (p_1, p_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$\nabla\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{a}_j), \quad (2-66)$$

那么

$$\int_{\mathbb{T}^2} \langle \mathbb{J}j(H), \text{Hess } \eta j(H) \rangle dx = -\nabla \eta(\mathbf{a}_j) \cdot (\mathbb{J} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q})), \quad (2-67)$$

$$\int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle j(H), \text{Hess } \eta j(H) \rangle - \frac{1}{2} \Delta \eta |j(H)|^2 \right) dx = -\nabla \eta(\mathbf{a}_j) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}). \quad (2-68)$$

证明 可以固定一个光滑函数 $f_1 \in C_0^\infty(B_{2r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j))$ 满足

$$f_1(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j). \quad (2-69)$$

再定义

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) := \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}) \mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}_j), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2. \quad (2-70)$$

则 $\tilde{\Phi}$ 在 $B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j) \setminus \{\mathbf{a}_j\}$ 上是调和函数, 而且

$$j(H(\mathbf{x})) = -\mathbb{J} \nabla \tilde{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j). \quad (2-71)$$

再定义

$$\tilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}) - d_j \ln |\mathbf{x} - \mathbf{a}_j|, \quad \mathbf{x} \in B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j), \quad (2-72)$$

则根据式 (2-17) 以及式 (2-70) 可知 $\tilde{\Phi}_j(\mathbf{x})$ 是 $B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j)$ 上的调和函数. 注意到式 (2-58), 下式成立

$$\nabla \tilde{\Phi}_j(\mathbf{a}_j) = \sum_{k=1, k \neq j}^{2N} d_k \nabla F(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) - \mathbf{q} = -\frac{d_j}{2\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}). \quad (2-73)$$

将式 (2-71) 代入式 (2-67) 左手边, 并注意到 $\eta \in C_0^\infty(B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j))$ 以及式 (2-66), 可以得到对任意 $\rho < R$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \mathbb{J}j(H), \text{Hess } \eta j(H) \rangle dx &= \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \langle \nabla \tilde{\Phi}, \text{Hess } \eta(-\mathbb{J} \nabla \tilde{\Phi}) \rangle dx \\ &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \nabla \eta \cdot (\mathbb{J} \nabla \tilde{\Phi}) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \nabla \eta \cdot (\mathbb{J} \nabla |\tilde{\Phi}|^2) dx \\ &\quad + \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \nabla \eta \cdot (\mathbb{J} \nabla \tilde{\Phi}) \Delta \tilde{\Phi} dx \\ &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \nabla \eta \cdot (\mathbb{J} \nabla \tilde{\Phi}) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} ((-\mathbb{J} \nabla \eta) \cdot \mathbf{n}) |\nabla \tilde{\Phi}|^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \nabla \cdot (-\mathbb{J} \nabla \eta) |\nabla \tilde{\Phi}|^2 dx \\ &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \nabla \eta \cdot (\mathbb{J} \nabla \tilde{\Phi}) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} ((-\mathbb{J} \nabla \eta) \cdot \mathbf{n}) |\nabla \tilde{\Phi}|^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (2-74)$$

将式 (2-66)、式 (2-72) 与式 (2-73) 代入式 (2-74) 可知

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{T}^2} \langle \mathbb{J}j(H), \text{Hess } \eta j(H) \rangle dx \\
 &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \mathbf{p} \cdot \left(\mathbb{J} \left(d_j \frac{\mathbf{n}}{\rho} + \nabla \tilde{\Phi}_j \right) \right) \left(\frac{d_j}{\rho} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} (\mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{n})) \left| d_j \frac{\mathbf{n}}{\rho} + \nabla \tilde{\Phi}_j \right|^2 d\sigma \\
 &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{n})}{\rho^2} + d_j \frac{1}{\rho} \mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\nabla \tilde{\Phi}_j) + d_j \frac{1}{\rho} \mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{n}) \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\nabla \tilde{\Phi}_j) \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \\
 &\quad - \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{n})}{2\rho^2} + d_j \frac{1}{\rho} \mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{n}) \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{n}) |\nabla \tilde{\Phi}_j|^2 \right) d\sigma \\
 &= 2\pi d_j \mathbf{p} \cdot \left(-\mathbb{J} \frac{d_j}{2\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}) \right) + O(\rho). \tag{2-75}
 \end{aligned}$$

令上式两端 $\rho \rightarrow 0$ 并注意到式 (2-66), 可得式 (2-67).

记外法向 $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$. 将式 (2-71) 代入式 (2-68) 左手边, 并注意到 $\eta \in C_0^\infty(B_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a}_j))$ 以及式 (2-66), 可以得到对任意 $\rho < R$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle j(H), \text{Hess } \eta j(H) \rangle - \frac{1}{2} \Delta \eta |j(H)|^2 \right) dx \\
 &= \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \frac{1}{2} \left((\partial_x^2 \eta - \partial_y^2 \eta) \left((\partial_y \tilde{\Phi})^2 - (\partial_x \tilde{\Phi})^2 \right) - 4\partial_x \partial_y \eta \partial_x \tilde{\Phi} \partial_x \tilde{\Phi} \right) dx \\
 &= - \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \frac{1}{2} (\partial_x \eta n_1 - \partial_y \eta n_2) \left((\partial_y \tilde{\Phi})^2 - (\partial_x \tilde{\Phi})^2 \right) d\sigma \\
 &\quad + \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \partial_x \tilde{\Phi} \partial_y \tilde{\Phi} (\partial_y \eta n_1 + \partial_x \eta n_2) d\sigma \\
 &\quad - \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \left(\partial_x \eta (\partial_y \partial_x \tilde{\Phi} \partial_y \tilde{\Phi} - \partial_x^2 \tilde{\Phi} \partial_x \tilde{\Phi}) - \partial_y \eta (\partial_y^2 \tilde{\Phi} \partial_y \tilde{\Phi} - \partial_x \partial_y \tilde{\Phi} \partial_x \tilde{\Phi}) \right) dx \\
 &\quad + \int_{B_{r(\mathbf{a})} \setminus B_\rho(\mathbf{a}_j)} \left(\partial_x \eta (\partial_x \partial_y \tilde{\Phi} \partial_y \tilde{\Phi} + \partial_x \tilde{\Phi} \partial_y^2 \tilde{\Phi}) + \partial_y \eta (\partial_x \partial_y \tilde{\Phi} \partial_x \tilde{\Phi} + \partial_y \tilde{\Phi} \partial_x^2 \tilde{\Phi}) \right) dx \\
 &= - \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \frac{1}{2} (p_1 n_1 - p_2 n_2) \left((\partial_y \tilde{\Phi})^2 - (\partial_x \tilde{\Phi})^2 \right) d\sigma \\
 &\quad + \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} \partial_x \tilde{\Phi} \partial_y \tilde{\Phi} (p_2 n_1 + p_1 n_2) d\sigma. \tag{2-76}
 \end{aligned}$$

将式 (2-66)、式 (2-72) 与式 (2-73) 代入式 (2-76), 就得到

$$\int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle j(H), \text{Hess } \eta j(H) \rangle - \frac{1}{2} \Delta \eta |j(H)|^2 \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} p_1 \left(-\frac{n_1}{2} \left(\frac{d_j n_2}{\rho} + \partial_y \tilde{\Phi}_j \right)^2 + \frac{n_1}{2} \left(\frac{d_j n_1}{\rho} + \partial_x \tilde{\Phi}_j \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + n_2 \left(\frac{d_j n_1}{\rho} + \partial_x \tilde{\Phi}_j \right) \left(\frac{d_j n_2}{\rho} + \partial_y \tilde{\Phi}_j \right) \right) d\sigma \\
 &+ \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} p_2 \left(\frac{n_2}{2} \left(\frac{d_j n_2}{\rho} + \partial_y \tilde{\Phi}_j \right)^2 - \frac{n_2}{2} \left(\frac{d_j n_1}{\rho} + \partial_x \tilde{\Phi}_j \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + n_1 \left(\frac{d_j n_1}{\rho} + \partial_x \tilde{\Phi}_j \right) \left(\frac{d_j n_2}{\rho} + \partial_y \tilde{\Phi}_j \right) \right) d\sigma \\
 &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} p_1 \left(\frac{n_1}{2\rho^2} + \frac{d_j}{\rho} \partial_x \tilde{\Phi}_j + \frac{n_1}{2} (\partial_x \tilde{\Phi}_j)^2 - \frac{n_1}{2} (\partial_y \tilde{\Phi}_j)^2 + n_2 \partial_x \tilde{\Phi}_j \partial_y \tilde{\Phi}_j \right) d\sigma \\
 &\quad + \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a}_j)} p_2 \left(\frac{n_2}{2\rho^2} + \frac{d_j}{\rho} \partial_y \tilde{\Phi}_j - \frac{n_2}{2} (\partial_x \tilde{\Phi}_j)^2 + \frac{n_2}{2} (\partial_y \tilde{\Phi}_j)^2 + n_1 \partial_x \tilde{\Phi}_j \partial_y \tilde{\Phi}_j \right) d\sigma \\
 &= -\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}) + O(\rho). \tag{2-77}
 \end{aligned}$$

令上式两端 $\rho \rightarrow 0$ 并注意到式 (2-66), 可得式 (2-68). ■

2.2 量化涡旋的存在性

通过对 $|u^\varepsilon(t)|^2, e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)), \mathbf{j}(u^\varepsilon)$ 求导, 并代入方程式 (2-1), 很容易就可以得到

$$\partial_t |u^\varepsilon(t)|^2 = 2\nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon(t)), \tag{2-78}$$

$$\partial_t e^\varepsilon(u^\varepsilon) = \nabla \cdot \left(\operatorname{Re} \left(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \right) \right), \tag{2-79}$$

$$\partial_t \mathbf{j}(u^\varepsilon) = 2\nabla \cdot (\nabla u^\varepsilon \otimes \nabla u^\varepsilon) - \nabla \left(2e^\varepsilon(u^\varepsilon) + \operatorname{Im} \left(\overline{u_t^\varepsilon} u_t^\varepsilon \right) \right). \tag{2-80}$$

以上三个式子的直接推论是 $E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)), \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ 是守恒的:

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \equiv E^\varepsilon(u_0^\varepsilon), \quad t \geq 0, \tag{2-81}$$

$$\mathbf{Q}(u^\varepsilon(t)) \equiv \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon), \quad t \geq 0. \tag{2-82}$$

由式 (2-80) 以及式 (1-42) 可得

$$\partial_t J(u^\varepsilon) = \nabla \cdot (\mathbb{J} \nabla \cdot (\nabla u^\varepsilon \otimes \nabla u^\varepsilon)). \tag{2-83}$$

进而对任意 $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^2)$,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \partial_t J(u^\varepsilon) \varphi dx = \int_{\mathbb{T}^2} \langle \operatorname{Hess}(\varphi) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle dx. \tag{2-84}$$

注释 2.1: 式 (2-84) 以及类似的等式将在本文之后的证明之中反复出现并起到重要作用. 一般说来, 方程的解 u^ε 的奇性出现在量化涡旋附近, 注意到等式右端只

与 φ 的二阶导数有关, 如果将式 (2-84) 中的 φ 取成在量化涡旋附近线性的函数, 那么就可以规避掉量化涡旋附近的奇性.

利用以上等式, 可以证明如下引理, 它表明了量化涡旋在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下的存在性:

引理 2.8: 如果初值 u_0^ε 满足式 (2-3)、式 (2-4) 与式 (2-5), 则存在 $T > 0$ 以及李普希茨函数 $\mathbf{b}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2, j = 1, \dots, 2N$, 使得 NLS 式 (2-1) 的弱解 u^ε 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j(t)} \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2). \quad (2-85)$$

此外, T 和 $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{2N})$ 满足

$$T = \inf\{t > 0 \mid \text{存在 } 1 \leq j < k \leq 2N \text{ 使得 } |\mathbf{b}_j(t) - \mathbf{b}_k(t)| = 0\}. \quad (2-86)$$

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{a}^0. \quad (2-87)$$

证明 证明分为四步:

第 1 步: 证明 $J(u^\varepsilon(t))$ 的收敛性并给出一些估计:

简记 $r_0 := r(\mathbf{a}^0)$. 根据式 (2-81) 以及式 (2-5), 存在一致的常数 C 使得

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq 2N\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} + C, \quad t \geq 0. \quad (2-88)$$

根据式 (2-3), 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得任意 $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left\| J(u^\varepsilon(0)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{400} r_0. \quad (2-89)$$

根据 $u^\varepsilon \in C([0, +\infty), H^1(\mathbb{T}^2))$, 当 $t \rightarrow 0$ 时, 在 $L^2(\mathbb{T}^2)$ 中有 $\nabla u^\varepsilon(t) \rightarrow u^\varepsilon(0)$, 因而在 $L^1(\mathbb{T}^2)$ 中 $J(u^\varepsilon(t)) \rightarrow J(u^\varepsilon(0))$. 再考虑到 $L^1(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)$, 我们可以定义 $T^\varepsilon > 0$ 如下

$$T^\varepsilon := \sup \left\{ \tau \mid \left\| J(u^\varepsilon(0)) - J(u^\varepsilon(t)) \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{400} r_0, \quad 0 < t < \tau \right\}. \quad (2-90)$$

结合式 (2-90) 与式 (2-89) 我们有

$$\left\| J(u^\varepsilon(t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{200} r_0, \quad 0 < t < T^\varepsilon. \quad (2-91)$$

结合上式与式 (2-88), 根据引理 2.3 可知, 存在 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t) \in B_{r_0/2}(\mathbf{a}_j^0)$ 使得下面的式子成立:

$$\left\| J(u^\varepsilon(t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = o(1), \quad (2-92)$$

$$\left\| k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = o(1), \quad (2-93)$$

以及

$$\int_{\mathbb{T}_{r_0/4}^2(\mathbf{b}^\varepsilon(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) d\mathbf{x} \leq C, \quad \int_{B_{r_0/4}(\mathbf{b}_j^\varepsilon(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) d\mathbf{x} \geq \pi \ln \frac{r_0}{4\varepsilon} - C. \quad (2-94)$$

因为 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t) \in B_{r_0/2}(\mathbf{a}_j^0)$, 所以 $\mathbf{b}^\varepsilon = \mathbf{b}^\varepsilon(t) = (\mathbf{b}_1^\varepsilon(t), \dots, \mathbf{b}_{2N}^\varepsilon(t))$ 满足 $\mathbb{T}_{r_0/4}^2(\mathbf{b}^\varepsilon(t)) \subset \mathbb{T}_{3r_0/4}^2(\mathbf{a}^0)$, 而且 $B_{r_0/4}(\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)), j = 1, \dots, 2N$ 两两不交, 所以由式 (2-94) 可推出

$$\frac{1}{2} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}_{3r_0/4}^2(\mathbf{a}^0))}^2 \leq \int_{\mathbb{T}_{3r_0/4}^2(\mathbf{a}^0)} e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq C, \quad (2-95)$$

第 2 步: 估计 $|\mathbf{b}^\varepsilon(t_1) - \mathbf{b}^\varepsilon(t_2)|$

对于任意 $j = 1, \dots, 2N$ 以及任意 $0 \leq t_1 < t_2 < T^\varepsilon$, 取 $\eta \in C_0^\infty(B_{r_0}(\mathbf{a}_j^0))$ 满足

$$\eta(\mathbf{x}) = d_j \frac{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)}{|\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)|} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}_j^0), \quad \mathbf{x} \in B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0), \quad (2-96)$$

则由式 (2-84)、式 (2-92) 和式 (2-95), 我们有

$$\begin{aligned} \pi |\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)| &= \pi d_j \eta(\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2)) - \pi d_j \eta(\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \eta(\mathbf{x}) \left(\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2)} - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \eta(\mathbf{x}) (J(u^\varepsilon(t_2)) - J(u^\varepsilon(t_1))) d\mathbf{x} + o(1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\eta) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle d\mathbf{x} dt + o(1) \\ &\leq 2|t_2 - t_1| \|\eta\|_{C^2(B_{r_0}(\mathbf{a}_j^0))} \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}_{3r_0/4}^2(\mathbf{a}^0))}^2 + o(1) \\ &\leq C_* |t_2 - t_1| + o(1). \end{aligned} \quad (2-97)$$

第 3 步: 证明 $J(u^\varepsilon(t))$ 收敛性

取定 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ 使得对任意 $\varepsilon < \varepsilon_1$, 以下三个不等式成立:

$$\left\| J(u^\varepsilon(0)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{1600} r_0, \quad (2-98)$$

$$\left\| J(u^\varepsilon(t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{1600} r_0, \quad (2-99)$$

$$|\mathbf{b}^\varepsilon(t_1) - \mathbf{b}^\varepsilon(t_2)| \leq C_* |t_1 - t_2| + \frac{1}{3200N} r_0, \quad t_1, t_2 \in [0, T^\varepsilon]. \quad (2-100)$$

结合式 (2-98) - 式 (2-100), 可以得到

$$\|J(u^\varepsilon(0)) - J(u^\varepsilon(t))\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq 2N\pi C_* t + \frac{3\pi}{1600} r_0. \quad (2-101)$$

我们接下来证明 $T^\varepsilon \geq T_0 := r_0/(6400NC_*)$ 对任意 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 成立. 假设不然, 即存在 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 使得 $T^\varepsilon < T_0$. 根据 $u^\varepsilon \in C([0, +\infty), H^1(\mathbb{T}^2))$ 以及式 (2-101), 下式成立:

$$\begin{aligned} \|J(u^\varepsilon(0)) - J(u^\varepsilon(T^\varepsilon))\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} &= \lim_{\tau \rightarrow T^\varepsilon -} \|J(u^\varepsilon(0)) - J(u^\varepsilon(\tau))\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \\ &\leq \lim_{\tau \rightarrow T^\varepsilon -} 2N\pi C_* \tau + \frac{3\pi}{1600} r_0 \\ &< 2N\pi C_* T_0 + \frac{3\pi}{1600} r_0 = \frac{7\pi r_0}{3200}. \end{aligned} \quad (2-102)$$

再根据 $u^\varepsilon \in C([0, +\infty), H^1(\mathbb{T}^2))$, 存在 $t > T^\varepsilon$ 使得

$$\|J(u^\varepsilon(0)) - J(u^\varepsilon(t))\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi r_0}{400}, \quad (2-103)$$

与 T^ε 定义式 (2-90) 矛盾.

由式 (2-97) 以及 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t) \in B_{r_0/2}(\mathbf{a}_j^0)$ 一致有界, 我们可以重复阿尔泽拉-阿斯科利 (Arzelà-Ascoli) 定理的证明, 并作出适当的调整, 得到 \mathbf{b}^ε 存在子列一致收敛到 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$, 而且 $\mathbf{b} \in C^1([0, T_0]; (\mathbb{T}^2)_*^{2N})$. 式 (2-85) 则是式 (2-92)、式 (2-93) 以及 \mathbf{b}^ε 收敛性的直接推论. 最后, 在式 (2-85) 中令 $t = 0$ 并与式 (2-3) 比较, 就得到了式 (2-87).

第 4 步: 得到 T 与 \mathbf{b} 的关系式 (2-86)

注意到以上证明在 $\mathbf{b}(t) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 时都可以重复, 因而可以延长 \mathbf{b} 的存在区间直到 $[0, T]$, 其中 T 定义如式 (2-86). ■

利用引理 2.8 中得到的 $\mathbf{b}(t)$, 定义

$$u_*(\mathbf{x}, t) := H(\mathbf{x}; \mathbf{b}(t), \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))), \quad (2-104)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))$ 是连续的, 而且满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{b}_j(t) + 2\pi \mathbb{Z}^2, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (2-105)$$

则有如下引理:

引理 2.9: 假设 $u^\varepsilon, \mathbf{b} = \mathbf{b}(t) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{2N})$ 如引理 2.8 所示, 则对任意 $T_1 < T$,

$$j(u^\varepsilon) \rightharpoonup j(u_*) \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]), \quad \frac{j(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup j(u_*) \text{ 于 } L^2_{loc}(\mathbb{T}^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (2-106)$$

证明 证明分为 4 步.

第 1 步: 证明 $\mathbf{j}(u^\varepsilon)$ 的收敛性

记 $r_1 := \min_{t \in [0, T_1]} r(\mathbf{b}(t))$. 式 (2-85) 意味着存在 ε_0 使得对任意 $\varepsilon < \varepsilon_0, t \in [0, T_1]$,

$$\left\| \mathbf{J}(u^\varepsilon(t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{\pi}{200} r_1 \leq \frac{\pi}{200} r(\mathbf{b}(t)). \quad (2-107)$$

从而由引理 2.3 以及式 (2-88),

$$\int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \leq C, \quad \|\mathbf{j}(u^\varepsilon(t))\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq C, \quad (2-108)$$

$$\| |u^\varepsilon|^2 - 1 \|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (2-109)$$

式 (2-108) 意味着存在一个函数 $\mathbf{j}_1 \in L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])$ 以及 u^ε 的一个子列 (仍记为 u^ε), 使得

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}_1 \quad \text{于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]). \quad (2-110)$$

结合式 (2-108)、式 (1-27) 以及式 (2-13) 可推出

$$\int_0^{T_1} \left\| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \right\|_{L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)))}^2 dt \leq 2 \int_0^{T_1} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) d\mathbf{x} dt \leq CT_1. \quad (2-111)$$

由上式可推导出存在函数 $\mathbf{j}_2 \in L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1])$ 以及 u^ε 的一个子列 (仍记为 u^ε), 使得

$$\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}_2 \quad \text{于 } L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (2-112)$$

结合上式与式 (2-109), 可以得到

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) = |u^\varepsilon| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}_2 \quad \text{于 } L^1(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (2-113)$$

通过式 (2-110) 和式 (2-113) 可推出

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2. \quad (2-114)$$

第 2 步: 验证 $\nabla \cdot \mathbf{j}_1 = 0$

对任意 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])$, 根据式 (2-78) 以及式 (2-109), 如下式子成立:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \varphi \nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) d\mathbf{x} dt \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \varphi \partial_t \frac{|u^\varepsilon|^2 - 1}{2} d\mathbf{x} dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \partial_t \varphi \frac{|u^\varepsilon|^2 - 1}{2} d\mathbf{x} dt \right| \\ &\leq C \|\varphi\|_{C^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}, \end{aligned} \quad (2-115)$$

进而

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \varphi \nabla \cdot \mathbf{j}_1 dx dt &= - \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}_1 dx dt = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) dx dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \varphi \nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2-116)$$

从而 $\nabla \cdot \mathbf{j}_1 = 0$.

第 3 步: 计算 $\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}(u_*)$

考虑到式 (2-55) 与式 (2-104),

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}(u_*)) = 0. \quad (2-117)$$

类似地, $\nabla \cdot (\mathbb{J}(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}(u_*))) = 0$. 因此, 存在 $\mathbf{g} : [0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 满足

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{j}(u_*(\mathbf{x}, t)). \quad (2-118)$$

注意到式 (2-110)、式 (2-55) 和式 (2-104), 下式成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= \int_{\mathbb{T}^2} (\mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) - \mathbf{j}(u_*(\mathbf{x}, t))) dx = \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) dx - \mathbb{J}\mathbf{q}(t), \\ \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t)) &\rightarrow \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) dx = \mathbf{g}(t) + \mathbb{J}\mathbf{q}(t) \quad \text{于 } L^1([0, T_1]). \end{aligned} \quad (2-119)$$

根据式 (2-82) 以及式 (2-4) 可以推出

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon) = \mathbb{J}\mathbf{q}_0. \quad (2-120)$$

上式与式 (2-119) 意味着 $\mathbf{g}(t)$ 关于 t 连续, 而且

$$\mathbf{g}(t) = \mathbb{J}\mathbf{q}_0 - \mathbb{J}\mathbf{q}(t). \quad (2-121)$$

第 4 步: 证明 $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$

结合式 (2-120)、式 (2-121)、式 (2-88)、式 (2-85) 以及引理 2.2, 可以知道

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(t) \in 2\pi\mathbb{Z}^2. \quad (2-122)$$

注意到 \mathbf{g} 连续, 利用式 (2-122) 可以得到 $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$. 再结合式 (2-118)、式 (2-110)、式 (2-112) 以及式 (2-114), 可以得到式 (2-106) 对 u^ε 的一个子列成立. 但对于任意 u^ε 的子列 u^{ε_n} , 以上证明均成立, 即存在 u^{ε_n} 的子列满足式 (2-106). 注意到极限是相同的, 这样最终证明了式 (2-106) 是对 u^ε 成立的. ■

接下来我们给出 $\int_{\mathbb{T}_\rho^2(b(t))} (e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) + |\mathbf{j}(u^\varepsilon) - \mathbf{j}(u_*)|^2) dx$ 的估计.

首先陈述一个引理, 其证明参见 Jerrard 等^[45]对其引理 3 的证明:

引理 2.10 (Jerrard-Spirt): 存在一个万有常数 $C > 0$ 使得如果 $u \in H^1(B_\rho(\mathbf{0}); \mathbb{C})$

满足

$$\|J(u) \pm \pi\delta_0\|_{W^{-1,1}(B_\rho(\mathbf{0}))} \leq \frac{\rho}{4}, \quad (2-123)$$

那么

$$\int_{B_\rho(\mathbf{0})} e^\varepsilon(u) dx - \left(\ln \frac{\rho}{\varepsilon} + \gamma\right) \geq -C \frac{\varepsilon}{\rho} \sqrt{\ln \frac{\rho}{\varepsilon}} - \frac{C}{\rho} \|J(u) \pm \pi\delta_0\|_{W^{-1,1}(B_\rho(\mathbf{0}))}. \quad (2-124)$$

接下来我们证明:

引理 2.11: 假设 $u^\varepsilon, \mathbf{b}, T$ 均如引理 2.8 中所示, 那么, 存在一个万有常数 (universal constant) C 使得对任意 $T_2 < T$ 以及 $\rho < r_2 := \min_{t \in [0, T_2]} r(\mathbf{b}(t))$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b})} \left(e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) dx dt \leq C \int_0^T \Sigma(t) dt, \quad (2-125)$$

其中

$$\Sigma(t) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))). \quad (2-126)$$

证明 根据式 (2-85)、式 (2-106)、式 (2-81) 与式 (2-5) 可以得到

$$J(u^\varepsilon(t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad t \in [0, T_2], \quad (2-127)$$

$$\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightarrow \mathbf{j}(u_*) \text{ 于 } L_{loc}^2(\mathbb{T}_*^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_2]), \quad (2-128)$$

以及

$$\Sigma(t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))) < +\infty, \quad (2-129)$$

由引理 2.10, 式 (2-127) 意味着对任意 $\varepsilon < \rho$,

$$\int_{B_\rho(\mathbf{b}_j(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx - \left(\gamma + \pi \ln \frac{\rho}{\varepsilon}\right) \geq -\Sigma_1(\varepsilon), \quad (2-130)$$

其中

$$\Sigma_1(\varepsilon) = C \frac{\varepsilon}{\rho} \sqrt{\ln \frac{\rho}{\varepsilon}} + \frac{C}{\rho} \sup_{t \in [0, T]} \|J(u^\varepsilon(t)) - \pi\delta_{\mathbf{b}_j(t)}\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)}. \quad (2-131)$$

由式 (2-130)、式 (2-129) 以及式 (1-41), 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx &= \int_{\mathbb{T}^2} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx - \sum_{j=1}^{2N} \int_{B_\rho(\mathbf{b}_j(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) dx \\ &\leq W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))) - 2N \left(\gamma + \pi \ln \frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \Sigma(t) + \Sigma_1(\varepsilon) \\ &= 2N\pi \ln \frac{1}{\rho} + W(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))) + \Sigma(t) + \Sigma_1(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2-132)$$

结合式 (2-60) 与式 (2-132), 就得到了

$$\int_{\mathbb{T}_{\rho}^2(\mathbf{b}(t))} (e^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t)) - e^{\varepsilon}(u_{*}(t))) dx \leq \Sigma(t) + \Sigma_1(\varepsilon) + O(\rho^2). \quad (2-133)$$

由式 (1-27) 可推出

$$e^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) - e^{\varepsilon}(u_{*}) = e^{\varepsilon}(|u^{\varepsilon}|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon})}{|u^{\varepsilon}|} - \mathbf{j}(u_{*}) \right|^2 + \mathbf{j}(u_{*}) \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon})}{|u^{\varepsilon}|} - \mathbf{j}(u_{*}) \right). \quad (2-134)$$

结合式 (2-133) 与式 (2-134), 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}_{\rho}^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^{\varepsilon}(|u^{\varepsilon}(t)|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon}(t))}{|u^{\varepsilon}(t)|} - \mathbf{j}(u_{*}(t)) \right|^2 \right) dx \\ & \leq \Sigma(t) + O(\rho^2) + \Sigma_1(\varepsilon) - \int_{\mathbb{T}_{\rho}^2(\mathbf{b})} \mathbf{j}(u_{*}(t)) \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon}(t))}{|u^{\varepsilon}(t)|} - \mathbf{j}(u_{*}(t)) \right) dx. \end{aligned} \quad (2-135)$$

注意到式 (2-128), 在 $[0, T]$ 上对式 (2-135) 两边分别积分, 并且令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}_{\rho}^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^{\varepsilon}(|u^{\varepsilon}|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon})}{|u^{\varepsilon}|} - \mathbf{j}(u_{*}) \right|^2 \right) dx dt \leq \int_0^T \Sigma(t) dt + O(\rho^2). \quad (2-136)$$

以上估计对任意 $\rho' < \rho$ 都成立, 而且 $\mathbb{T}_{\rho'}^2(\mathbf{b}(t)) \supset \mathbb{T}_{\rho}^2(\mathbf{b}(t))$, 所以

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}_{\rho}^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^{\varepsilon}(|u^{\varepsilon}|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon})}{|u^{\varepsilon}|} - \mathbf{j}(u_{*}) \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}_{\rho'}^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^{\varepsilon}(|u^{\varepsilon}|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^{\varepsilon})}{|u^{\varepsilon}|} - \mathbf{j}(u_{*}) \right|^2 \right) dx dt \\ & \leq \int_0^T \Sigma(t) dt + O((\rho')^2). \end{aligned} \quad (2-137)$$

在上式中令 $\rho' \rightarrow 0$, 最终得到式 (2-125). ■

2.3 约化动力学规律

2.3.1 定理 2.1 的证明

接下来我们给出定理 2.1 的证明

证明 令 \mathbf{a} 是方程式 (2-7) 的解, \mathbf{b}, T 如引理 2.8 中所给出. 为了简洁, 在本小节将使用如下记号

$$\begin{aligned} W(\mathbf{a}(t)) &= W(\mathbf{a}(t); \mathbf{q}(\mathbf{a}(t))), & W(\mathbf{b}(t)) &= W(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}(\mathbf{b}(t))), \\ W_{\varepsilon}(\mathbf{a}(t)) &= W_{\varepsilon}(\mathbf{a}(t); \mathbf{q}(\mathbf{a}(t))), & W_{\varepsilon}(\mathbf{b}(t)) &= W_{\varepsilon}(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}(\mathbf{b}(t))). \end{aligned} \quad (2-138)$$

定义

$$T_a = \inf\{t > 0 \mid \exists 1 \leq j < k \leq 2N \text{ 使得 } |\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{a}_k(t)| = 0\}, \quad (2-139)$$

$$T_2 := \min\{T, T_a\}, \quad (2-140)$$

$$\zeta(t) := \sum_{j=1}^{2N} |\mathbf{b}_j(t) - \mathbf{a}_j(t)|, \quad t \geq 0. \quad (2-141)$$

对任意 $\tilde{T} < T_2$, 引理 2.8 以及 \mathbf{a} 的定义式 (2-7) 意味着 $\mathbf{b}(t)$ 和 $\mathbf{a}(t)$ 在 $[0, \tilde{T}]$ 都是李普希茨的. 因此, 存在常数 C_0 使得

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(0)| + |\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}(0)| \leq C_0 t, \quad (2-142)$$

上式与式 (2-141) 可推导出

$$|\zeta(t) - \zeta(0)| \leq 2NC_0 t. \quad (2-143)$$

引理 2.8 以及 \mathbf{a} 的定义式 (2-7) 意味着 $\mathbf{b}(0) = \mathbf{a}^0, \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}^0$. 因此由式 (2-141) 可推出

$$\zeta(0) = \sum_{j=1}^{2N} |\mathbf{b}_j(0) - \mathbf{a}_j(0)| = \sum_{j=1}^{2N} |\mathbf{a}_j^0 - \mathbf{a}_j^0| = 0. \quad (2-144)$$

结合式 (2-143) 与式 (2-144), 可以得到

$$\zeta(t) \leq \frac{r_*}{4}, \quad \text{对于 } 0 \leq t \leq T_*, \quad (2-145)$$

其中

$$r_* = \min \left\{ r(\mathbf{a}(t)), r(\mathbf{b}(t)) \mid 0 \leq t \leq \tilde{T} \right\}, \quad T_* := \frac{r_*}{8NC_0}. \quad (2-146)$$

我们接下来证明在 $[0, T_*]$ 上, $\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t)$, 也就是 $\zeta(t) = 0$.

将式 (2-7) 代入 $\zeta(t)$ 的导数, 就会有

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &\leq \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\mathbf{a}}_j(t) - \dot{\mathbf{b}}_j(t)| = \sum_{j=1}^{2N} \left| -d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) - \dot{\mathbf{b}}_j(t) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{2N} \left| -d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) + d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| + \sum_{j=1}^{2N} \left| -d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) - \dot{\mathbf{b}}_j(t) \right| \\ &= \sum_{j=1}^{2N} B_j(t) + \sum_{j=1}^{2N} A_j(t), \end{aligned} \quad (2-147)$$

其中

$$A_j(t) = \left| \dot{\mathbf{b}}_j(t) + d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right|, \quad (2-148)$$

$$B_j(t) = \left| -d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{a_j} W(\mathbf{a}(t)) + d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{b_j} W(\mathbf{b}(t)) \right|. \quad (2-149)$$

由式 (2-145) 可知 $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \in (\mathbb{T}^2)_{r_*}^{2N}$, 从而将式 (2-59) 代入 B_j 的定义式 (2-149) 可推出

$$B_j(t) \leq C \zeta(t). \quad (2-150)$$

对于 $A_j(t)$, 存在光滑函数 $\eta \in C_0(B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)))$ 满足

$$\eta = \eta(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t)), \quad (2-151)$$

其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$ 定义如下

$$A_j(t) = d_j \mathbf{v} \cdot \left(\dot{\mathbf{b}}_j(t) + d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{b_j} W(\mathbf{b}(t)) \right). \quad (2-152)$$

由式 (2-84) 以及式 (2-85) 可推出

$$\begin{aligned} d_j \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}}_j(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} d_j \mathbf{v} \cdot \frac{1}{h} (\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_{\mathbb{T}^2} [\eta(\mathbf{x}) J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t+h)) - \eta(\mathbf{x}) J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t))] dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\eta) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle dx ds. \end{aligned} \quad (2-153)$$

由式 (2-67) 与式 (2-104) 可得

$$\begin{aligned} d_j \mathbf{v} \cdot \left(d_j \frac{1}{\pi} \mathbb{J} \nabla_{b_j} W(\mathbf{b}(t)) \right) &= - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*(t)), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*(t)) \rangle dx \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*(s)), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*(s)) \rangle dx ds. \end{aligned} \quad (2-154)$$

结合式 (2-152)、式 (2-153) 与式 (2-154), 并且注意到式 (2-13), 我们可以得到

$$\begin{aligned} A_j(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} [\langle \text{Hess}(\eta) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle - \langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \rangle] dx ds \\ &= L_j(t) + K_j(t) = L_j(t) + K_{j1}(t) + K_{j2}(t) + K_{j3}(t), \end{aligned} \quad (2-155)$$

其中

$$L_j(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\eta) \nabla |u^\varepsilon|, \mathbb{J} \nabla |u^\varepsilon| \rangle dx ds, \quad (2-156)$$

$$\begin{aligned} K_j(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left[\left\langle \text{Hess}(\eta) \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|}, \frac{\mathbb{J} \mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \rangle \right] dx ds, \end{aligned} \quad (2-157)$$

$$K_{j1}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \mathbb{J} \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle dx ds, \quad (2-158)$$

$$K_{j2}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle dx ds, \quad (2-159)$$

$$K_{j3}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \right\rangle dx ds. \quad (2-160)$$

注意到 $\text{Hess}(\eta) \in C_0(B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)) \setminus B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t)))$, 并且把式 (2-106) 代入式 (2-159) 以及式 (2-160) 就会有

$$K_{j2}(t) \equiv 0, \quad K_{j3}(t) \equiv 0. \quad (2-161)$$

因此, 只需要估计 $L_j(t)$ 和 $K_{j1}(t)$.

根据定义式 (2-156) 和式 (2-158), 有如下估计

$$|K_{j1}(t)| + |L_j(t)| \leq C \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \left(\left\| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right\|_{L^2(\mathbb{T}_{3r_*/4}^2(\mathbf{b}(s)))}^2 + \|\nabla |u^\varepsilon|\|_{L^2(\mathbb{T}_{3r_*/4}^2(\mathbf{b}(s)))}^2 \right) ds. \quad (2-162)$$

结合式 (2-81)、式 (2-5)、引理 2.8、式 (2-106) 以及引理 2.11, 如下估计成立:

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}_{3r_*/4}^2(\mathbf{b})} \left(e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) dx ds \\ & \leq C \int_0^T (W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(s))) ds \\ & = C \int_0^T (W(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) - W(\mathbf{b}(s))) ds. \end{aligned} \quad (2-163)$$

将上式代入式 (2-162), 就可以得到

$$|K_{j1}(t)| + |L_j(t)| \leq C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} |W(\mathbf{a}^0) - W(\mathbf{b}(s))| ds \leq \frac{C}{\pi} |W(\mathbf{a}^0) - W(\mathbf{b}(t))|. \quad (2-164)$$

注意到式 (1-35) 与式 (2-7), 求 $W(\mathbf{a}(t))$ 关于 t 的导数如下:

$$\frac{d}{dt} W(\mathbf{a}(t)) = \sum_{j=1}^{2N} \nabla_{a_j} W(\mathbf{a}(t)) \cdot \dot{a}_j(t) = \sum_{j=1}^{2N} \nabla_{a_j} W(\mathbf{a}) \cdot \left(-\frac{1}{\pi} d_j \mathbb{J} \nabla_{a_j} W(\mathbf{a}) \right) = 0. \quad (2-165)$$

这意味着 $W(\mathbf{a}(t)) \equiv W(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0)$. 因此, 由式 (2-164) 可得

$$|K_{j_1}(t)| + |L_j(t)| \leq \frac{C}{\pi} |W(\mathbf{a}(t)) - W(\mathbf{b}(t))| \leq C\zeta(t). \quad (2-166)$$

结合式 (2-147)、式 (2-150)、式 (2-155)、式 (2-161) 以及式 (2-166) 可推出

$$\dot{\zeta}(t) \leq \sum_{j=1}^{2N} B_j(t) + \sum_{j=1}^{2N} (L_j(t) + K_{j_1}(t) + K_{j_2}(t) + K_{j_3}(t)) \leq C\zeta(t). \quad (2-167)$$

由上式与式 (2-144) 可知在 $[0, T_*]$ 上 $\zeta(t) \equiv 0$. 因此, 在 $[0, T_*]$ 上 $\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t)$. 回顾 T_* 的定义式 (2-145), T_* 在 \tilde{T} 取定的情况下是个常数. 因此, 可以在 $[T_*, 2T_*]$, $[2T_*, 3T_*]$ 以及之后的区间上重复之前的证明. 接下来就会得到对任意 $t \in [0, \tilde{T}]$ 都有 $\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t)$. 因为 $\tilde{T} < T_2$ 是任意的, 所以对任意 $t \in [0, T_2)$ 都有 $\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t)$. 再结合式 (2-86) 和式 (2-139) 就会有等式 $T = T' = \tilde{T}$. 结合引理 2.8 以及式 (2-7), $\mathbf{b}(t) = \mathbf{a}(t)$ 在 $[0, T)$ 上同时满足式 (2-6) 和式 (2-7), 这样一来, 我们就完成了证明. ■

2.3.2 约化动力学规律的首次积分

定义

$$\xi(\mathbf{a}) := \frac{1}{4} \sum_{1 \leq j \neq k \leq 2N} d_j d_k |\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k|^2, \quad \mathbf{a} \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}. \quad (2-168)$$

则有

引理 2.12: 令 $\mathbf{a} := \mathbf{a}(t) = (\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_{2N}(t))^T \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 是约化动力学规律式 (2-7) 的解, 初值为式 (2-9), 则分别由式 (2-8)、式 (1-35) 和式 (2-168) 定义的 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$, $W(\mathbf{a}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)))$ 以及 $\xi(\mathbf{a})$ 是三个首次积分 (first integral), 即

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) := \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \equiv \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}^0) = \mathbf{q}_0, \quad (2-169)$$

$$W(\mathbf{a}) := W(\mathbf{a}(t)) \equiv W(\mathbf{a}(0)) = W(\mathbf{a}^0), \quad t \geq 0, \quad (2-170)$$

$$\xi(\mathbf{a}) := \xi(\mathbf{a}(t)) \equiv \xi(\mathbf{a}(0)) = \xi(\mathbf{a}^0). \quad (2-171)$$

证明 求 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 关于 t 的导数, 并注意到式 (2-7)、式 (1-29)、式 (2-58) 以及 F 是偶函数, 下式成立:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) &= 2 \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbb{J} \left(\sum_{1 \leq k \leq 2N, k \neq j} d_k \nabla F(\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{a}_k(t)) - \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \right) \\ &= 2 \mathbb{J} \sum_{1 \leq j \neq k \leq 2N} d_j d_k \nabla F(\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{a}_k(t)) - 2 \left(\sum_{j=1}^{2N} d_j \right) \mathbb{J} \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \\ &= \mathbf{0}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2-172)$$

上式可以直接推出式 (2-169). 通过式 (2-165) 就得到式 (2-170). 最后, 结合 $\xi(\mathbf{a}) = -\frac{1}{4}|\mathbf{q}(\mathbf{a})|^2$ 与式 (2-169), 可知式 (2-171) 也成立. ■

2.3.3 约化动力学规律的一些解析解及数值结果

引理 2.13: 如果 $N = 1$, 那么初值为式 (2-9) 的方程式 (2-7) 的解如下

$$\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{a}_1^0 + \mathbf{p}t, \quad \mathbf{a}_2(t) = \mathbf{a}_2^0 + \mathbf{p}t, \quad (2-173)$$

其中

$$\mathbf{p} = -2\mathbb{J}\nabla F(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0) - 2\mathbb{J}\mathbf{q}_0 \quad (2-174)$$

证明 式 (2-173) 可直接推出 $\mathbf{a}(t) = (\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t))$ 满足式 (2-7) 的初值, 而且

$$\mathbf{a}_1(t) - \mathbf{a}_2(t) \equiv \mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0, \quad t \geq 0. \quad (2-175)$$

注意到 F 是偶函数并且将式 (2-175)、式 (2-169) 代入式 (2-7) 可知式 (2-7) 的右手边在 $j = 1, 2$ 时分别等于

$$\begin{aligned} 2d_2\mathbb{J}\nabla F(\mathbf{a}_1(t) - \mathbf{a}_2(t)) - 2\mathbb{J}\mathbf{q}_0 &= -2\mathbb{J}\nabla F(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0) - 2\mathbb{J}\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}, \\ 2d_1\mathbb{J}\nabla F(\mathbf{a}_2(t) - \mathbf{a}_1(t)) - 2\mathbb{J}\mathbf{q}_0 &= 2\mathbb{J}\nabla F(-(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0)) - 2\mathbb{J}\mathbf{q}_0 \\ &= -2\mathbb{J}\nabla F(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0) - 2\mathbb{J}\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2-176)$$

\mathbf{a}_j 关于 t 的导数如下

$$\dot{\mathbf{a}}_1(t) = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{a}}_2(t) = \mathbf{p}, \quad (2-177)$$

上式等于式 (2-7) 右手边. 考虑到式 (2-7) 解的唯一性, 式 (2-173) 是式 (2-7) 在 $N = 1$ 时的解. ■

引理 2.14: 在式 (2-7) 中取 $N = 2$, 取初值式 (2-9) 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha_0, \beta_0)^T, & \mathbf{a}_2^0 &= (0.5, 0.5)^T - (\alpha_0, \beta_0)^T, \\ \mathbf{a}_3^0 &= (0.5, 0.5)^T + (\beta_0, \alpha_0)^T, & \mathbf{a}_4^0 &= (0.5, 0.5)^T - (\beta_0, \alpha_0)^T, \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2-178)$$

其中 $0 < \beta_0, \alpha_0 < 1$, 则初值为式 (2-9) 的方程式 (2-7) 的解析解由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(t) &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha(t), \beta(t))^T, & \mathbf{a}_2(t) &= (0.5, 0.5)^T - (\alpha(t), \beta(t))^T, \\ \mathbf{a}_3(t) &= (0.5, 0.5)^T + (\beta(t), \alpha(t))^T, & \mathbf{a}_4(t) &= (0.5, 0.5)^T - (\beta(t), \alpha(t))^T, \end{aligned} \quad (2-179)$$

其中 $(\alpha(t), \beta(t))^T$ 是如下方程的解:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 2(-\partial_y F(\alpha - \beta, \beta - \alpha) + \partial_y F(2\alpha, 2\beta) - \partial_y F(\alpha + \beta, \alpha + \beta)), \\ \dot{\beta} = 2(\partial_x F(\alpha - \beta, \beta - \alpha) - \partial_x F(2\alpha, 2\beta) + \partial_x F(\alpha + \beta, \alpha + \beta)), \end{cases} \quad (2-180)$$

且初值为

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (2-181)$$

证明 由式 (1-36) 的对称性可知 F 满足

$$F(x, y) = F(-x, y) = F(x, -y) = F(y, x). \quad (2-182)$$

因而, 考虑到初值式 (2-178) 和方程式 (2-7) 的对称性, 可以假定 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ 满足式 (2-179). 将式 (2-179) 代入式 (2-7) 并且注意到

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \equiv \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad (2-183)$$

我们有

$$\dot{\mathbf{a}}_1 = 2\mathbb{J}(-\nabla F(\alpha - \beta, \beta - \alpha) + \nabla F(2\alpha, \beta) - \nabla F(\alpha + \beta, \alpha + \beta)). \quad (2-184)$$

再注意到 $\dot{\mathbf{a}}_1 = (\dot{\alpha}, \dot{\beta})^T$, 就得到方程式 (2-180). ■

与引理 2.14 类似, 如下引理也成立:

引理 2.15: 在式 (2-7) 中取 $N = 2$, 取初值式 (2-9) 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha_0, \beta_0)^T, & \mathbf{a}_2^0 &= (0.5, 0.5)^T - (\alpha_0, \beta_0)^T, \\ \mathbf{a}_3^0 &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha_0, -\beta_0)^T, & \mathbf{a}_4^0 &= (0.5, 0.5)^T - (\alpha_0, -\beta_0)^T, \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2-185)$$

其中 $0 < \beta_0, \alpha_0 < 1$, 则初值为式 (2-9) 的方程式 (2-7) 的解析解由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(t) &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha(t), \beta(t))^T, & \mathbf{a}_2(t) &= (0.5, 0.5)^T - (\alpha(t), \beta(t))^T, \\ \mathbf{a}_3(t) &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha(t), -\beta(t))^T, & \mathbf{a}_4(t) &= (0.5, 0.5)^T - (\alpha(t), -\beta(t))^T, \end{aligned} \quad (2-186)$$

其中 $(\alpha(t), \beta(t))^T$ 是如下方程的解:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 2(\partial_y F(2\alpha, 2\beta) - \partial_y F(0, 2\beta)), \\ \dot{\beta} = 2(-\partial_x F(2\alpha, 2\beta) + \partial_x F(2\alpha, 0)), \end{cases} \quad (2-187)$$

而且初值为式 (2-181).

引理 2.16: 在式 (2-7) 中取 $N = 2$, 取初值式 (2-9) 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= (x_0, 0.25)^T + (\alpha_0, \beta_0)^T, & \mathbf{a}_2^0 &= (x_0, 0.25)^T - (\alpha_0, \beta_0)^T, \\ \mathbf{a}_3^0 &= (x_0, 0.75)^T + (\alpha_0, -\beta_0)^T, & \mathbf{a}_4^0 &= (x_0, 0.75)^T - (\alpha_0, -\beta_0)^T, \\ \mathbf{q}_0 &= (0, -2\pi)^T, \end{aligned} \quad (2-188)$$

其中 $0 < \beta_0, \alpha_0 < 1$, 则初值为式 (2-9) 的方程式 (2-7) 的解析解由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(t) &= (x_0, 0.25)^T + (\alpha(t), \beta(t))^T - 2t \Downarrow \mathbf{q}_0, \\ \mathbf{a}_2(t) &= (x_0, 0.25)^T - (\alpha(t), \beta(t))^T - 2t \Downarrow \mathbf{q}_0, \\ \mathbf{a}_3(t) &= (x_0, 0.75)^T + (\alpha(t), -\beta(t))^T - 2t \Downarrow \mathbf{q}_0, \\ \mathbf{a}_4(t) &= (x_0, 0.75)^T - (\alpha(t), -\beta(t))^T - 2t \Downarrow \mathbf{q}_0, \end{aligned} \quad (2-189)$$

其中 $(\alpha(t), \beta(t))^T$ 是如下方程的解:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 2(\partial_y F(2\alpha, 2\beta) - \partial_y(0, 2\beta - 0.5)), \\ \dot{\beta} = 2(-\partial_x F(2\alpha, 2\beta) + \partial_x F(2\alpha, 0.5)), \end{cases} \quad (2-190)$$

而且初值为式 (2-181)。

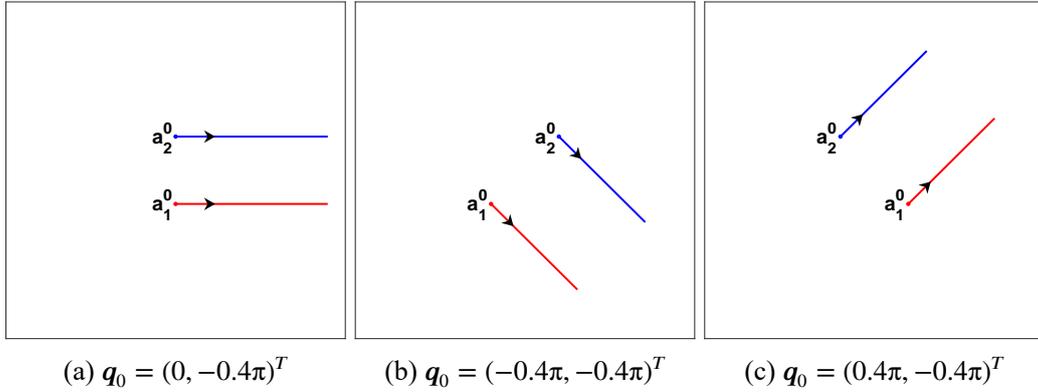


图 2.1 在 $N = 1$ 时不同初值的 NLSRDL (式 (2-7) 的解的轨迹), 方程初值式 (2-9) 从左到右分别为: (a) $\mathbf{a}_1^0 = (0.5, 0.4)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.5, 0.6)^T, \mathbf{q}_0 = (0, -0.4\pi)^T$, (b) $\mathbf{a}_1^0 = (0.4, 0.4)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.6, 0.6)^T, \mathbf{q}_0 = (-0.4\pi, -0.4\pi)^T$, (c) $\mathbf{a}_1^0 = (0.6, 0.4)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.4, 0.6)^T, \mathbf{q}_0 = (0.4\pi, -0.4\pi)^T$

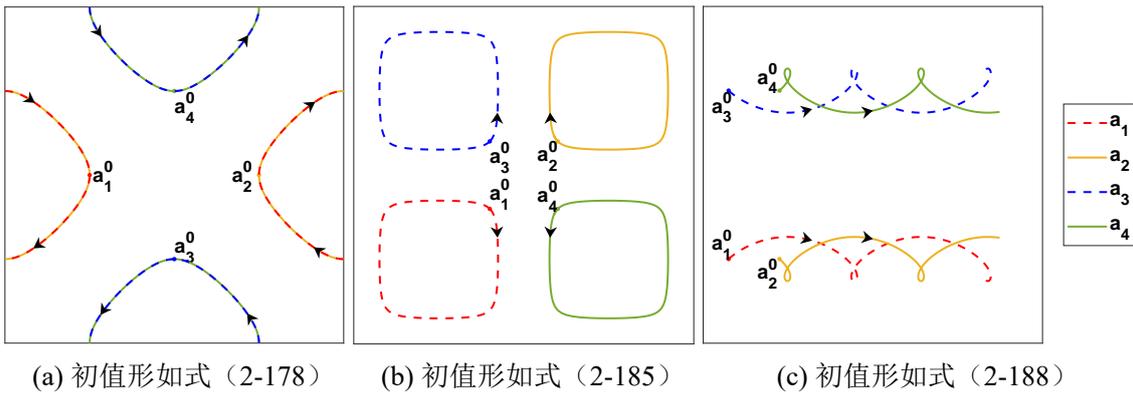


图 2.2 在 $N = 2$ 时不同初值的 NLSRDL (式 (2-7)) 的解的轨迹. 其初值从左至右依次为: (a) 形如式 (2-178), 其中 $\alpha_0 = -0.25, \beta_0 = 0, \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, (b) 形如式 (2-185), 其中 $\alpha_0 = -0.1, \beta_0 = -0.1, \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, (c) 形如式 (2-188), 其中 $x_0 = 0.15, \alpha_0 = -0.075, \beta_0 = 0, \mathbf{Q}_0 = (0, -2\pi)^T$.

为了展示不同初值式 (2-9) 的方程式 (2-7) 的解, 我们在不同假设下采用四

阶龙格-库塔方法 (fourth-order Runge-Kutta method) 数值求解, 其时间步长取为 $\Delta t = 10^{-4}$. 为了展示如引理 2.13 中所示动力学规律, 我们作图 2.1, 图中展示了 $N = 1$ 时初值形如式 (2-9) 的方程式 (2-7) 的解. 为了展示引理 2.14-引理 2.16 所描述的动力学规律, 我们作图 2.2, 图中展示了 $N = 2$ 时初值形如式 (2-178)、式 (2-185) 和式 (2-188) 的方程式 (2-7) 的解.

第 3 章 复金兹堡-朗道方程量化涡旋的约化动力学规律

本章主要研究复金兹堡-朗道方程（简记为 CGL）

$$k_\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \lambda i \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (|u^\varepsilon|^2 - 1) u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (3-1)$$

的量化涡旋动力学规律, 其初值设置为

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2. \quad (3-2)$$

此外, 动量 \mathbf{Q} 、流量 \mathbf{j} 由式 (1-28) 定义, 能量 E^ε 、能量密度 e^ε 由式 (1-27) 定义, 重整化能量 W 、带参数 ε 的重整化能量 W_ε 、雅可比行列式 J 以及 $(\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 等分别由式 (1-35)、式 (1-41)、式 (1-42)、式 (1-40) 等定义, 而在第 2.1 节有 $r(\mathbf{a})$ 、规范调和映射等的定义, 在此不再赘述. 为了方便, 我们将主要定理, 即定理 1.2, 复述如下:

定理 3.1 (CGL 的约化动力学规律): 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi\mathbb{Z}^2$ 使得初值式 (3-2) 中 u_0^ε 满足

$$J(u_0^\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0}, \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2) := [C^1(\mathbb{T}^2)]', \quad (3-3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon) = \mathbf{Q}_0 = \mathbb{J} \mathbf{q}_0, \quad (3-4)$$

以及

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} [E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0)] = 0. \quad (3-5)$$

则存在 $T > 0$ 以及 $2N$ 个李普希茨的路径 $\mathbf{a}_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (3-2) 的方程式 (3-1) 的解 u^ε 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (3-6)$$

而且 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律（以下方程简记为 CGLRDL）:

$$\dot{\mathbf{a}}_j - \lambda d_j \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j = -\frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})), \quad t > 0, \quad (3-7)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j(t) + 2\pi\mathbb{Z}^2, \quad (3-8)$$

而且方程式 (3-7) 初值为

$$\mathbf{a}_j(0) = \mathbf{a}_j^0, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (3-9)$$

包含定理 3.1 证明在内的本章主要结果基于本人的相关文章^[87].

3.1 量化涡旋的存在性

在方程式 (3-1) 两边同时乘以 $\overline{u_t^\varepsilon}$ 并取实部, 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = \nabla \cdot \operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) - k_\varepsilon |u_t^\varepsilon|^2. \quad (3-10)$$

上式可推出对任意 $0 \leq t_1 < t_2$,

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t_2)) - E^\varepsilon(u^\varepsilon(t_1)) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 d\mathbf{x} d\tau. \quad (3-11)$$

结合式 (3-11) 与式 (3-4), 可知存在 $C > 0$ 使得对任意 $\varepsilon > 0$,

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq 2N\pi \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + C. \quad (3-12)$$

在式 (3-1) 两边同时乘以 $\overline{u^\varepsilon}$ 并且取虚部, 可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = k_\varepsilon \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial t} |u^\varepsilon|^2. \quad (3-13)$$

在式 (3-1) 两边同时乘以 $\nabla \overline{u^\varepsilon}$ 并且注意到

$$\partial_t \mathbf{j}(u^\varepsilon) = 2\operatorname{Im}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) + \nabla \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon), \quad (3-14)$$

可得

$$k_\varepsilon \operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(u^\varepsilon) = \nabla \cdot (\nabla u^\varepsilon \otimes \nabla u^\varepsilon) - \nabla e^\varepsilon(u^\varepsilon) + \frac{\lambda}{2} \nabla \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon). \quad (3-15)$$

由上式与式 (1-42) 可以推出对任意 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$,

$$- \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \langle \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi \rangle d\mathbf{x} + \lambda \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial}{\partial t} J(u^\varepsilon) \varphi d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^2} \langle \operatorname{Hess}(\varphi) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle d\mathbf{x}. \quad (3-16)$$

利用以上等式可以得到如下结果:

引理 3.1: 如果 u_0^ε 满足式 (3-3)、式 (3-4) 以及式 (3-5), 那么存在 $T > 0$ 以及李普希茨路径 $\mathbf{b}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2, j = 1, \dots, 2N$, 使得

$$J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{b}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2). \quad (3-17)$$

证明 与引理 2.8 证明第 1 步类似, 通过引理 2.3、式 (3-12) 以及式 (3-3) 可以得到存在 $\varepsilon_0, T^\varepsilon$ 使得对于任意 $0 < t < T^\varepsilon, \varepsilon < \varepsilon_0$, 存在路径 $\mathbf{a}_j^\varepsilon(t) \in \mathbb{T}^2, j = 1, \dots, 2N$,

使得

$$\left\| J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = o(1), \quad (3-18)$$

$$\left\| k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{a}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = o(1),$$

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq 2N\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} - C, \quad (3-19)$$

$$\|j(u^\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq C. \quad (3-20)$$

式 (3-11)、式 (3-19) 与式 (3-12) 意味着存在常数 C 使得对任意 $t_1 < t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau = E^\varepsilon(u^\varepsilon(t_2)) - E^\varepsilon(u^\varepsilon(t_1)) \leq C. \quad (3-21)$$

接下来我们估计 $|\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)|$: 存在 $\eta \in C_0^\infty(B_{r(\mathbf{a}^0)}(\mathbf{a}_j^0))$ 满足

$$\eta(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)) \cdot \frac{\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)}{|\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)|}, \quad \mathbf{x} \in B_{3r(\mathbf{a}^0)/4}(\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)). \quad (3-22)$$

由式 (3-18)、式 (3-21)、式 (3-12) 以及式 (1-27) 可推出

$$\begin{aligned} \pi |\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)| &= \pi \int_{\mathbb{T}^2} (\delta_{\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_2)} - \delta_{\mathbf{a}_j^\varepsilon(t_1)}) \eta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon (e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t_2)) - e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t_1))) \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + o(1) \\ &\leq k_\varepsilon \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \nabla \cdot \operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) \eta d\mathbf{x} dt \right| + k_\varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \eta |u_t^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} dt + o(1) \\ &\leq k_\varepsilon \|\eta\|_{C^1(\mathbb{T}^2)} \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [t_1, t_2])} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [t_1, t_2])} + o(1) \\ &\leq C \sqrt{t_2 - t_1} + o(1). \end{aligned} \quad (3-23)$$

因此, 与引理 2.8 证明第 3 步类似, 存在 T^ε 的一个下界 T_0 , 以及连续路径 $\mathbf{b}_j : [0, T_0] \rightarrow \mathbb{T}^2$ 满足 $\mathbf{a}_j^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbf{b}_j(t)$ 对某一个子列成立, 进而式 (3-6) 成立. 与引理 2.8 证明第 4 步类似, 式 (3-17) 成立的时间可以一直延拓到 $[0, T)$, 其中 T 满足:

$$T = \min\{t | \mathbf{a}_j(t) = \mathbf{a}_k(t) \text{ 对某 } j \neq k \text{ 成立}\}. \quad (3-24)$$

接下来我们证明 \mathbf{b} 是李普希茨的. 对任意 $T_1 < T$, 记 $r = \min_{t \in [0, T_1]} r(\mathbf{b}(t))$. 对任意 $\rho < r$, 通过式 (3-17)、式 (3-12) 以及引理 2.3 可以得到

$$\int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \leq C. \quad (3-25)$$

考虑 $t_1 < t_2$, 如果其满足 $B_{r/2}(\mathbf{b}_j(t)) \subset B_{3r/4}(\mathbf{b}(t_1))$ 对任意 $t \in [t_1, t_2]$ 成立, 就存在测试

函数 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(B_{r(a^0)}(\mathbf{b}_j(t_1)))$ 满足

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t_1)) \cdot \mathbf{v}, \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t_1)) \cdot \mathbf{v}^\perp, \quad \mathbf{x} \in B_{3r/4}(\mathbf{b}_j(t_1)), \quad (3-26)$$

其中 $\mathbf{v} = d_j \lambda(\mathbf{b}_j(t_2) - \mathbf{b}_j(t_1)) / |\lambda(\mathbf{b}_j(t_2) - \mathbf{b}_j(t_1))|$ 而 $\mathbf{v}^\perp = -\mathbb{J}\mathbf{v}$. 接下来结合式 (3-16) 与式 (3-25), 可以得到

$$\begin{aligned} & -k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \mathbb{J}\nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1 \rangle \, d\mathbf{x}ds + \lambda \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial t} J(u^\varepsilon) \, d\mathbf{x}ds \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J}\nabla u^\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x}ds \\ & \leq |t_2 - t_1| \|\varphi_1\|_{C^2(\mathbb{T}^2)} \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}_{r/2}^2(\mathbf{b}(t)))}^2 \leq C|t_2 - t_1|. \end{aligned} \quad (3-27)$$

通过式 (3-10)、式 (3-21) 以及式 (3-17), 并且注意到 $\nabla \varphi_2 + \mathbb{J}\nabla \varphi_1 = \mathbf{0}$ 在 $B_{3r/4}(\mathbf{b}_j(t_1))$ 上成立, 式 (3-27) 第一行第一项可作如下估计:

$$\begin{aligned} & -k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \mathbb{J}\nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1 \rangle \, d\mathbf{x}ds \\ & = -k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi_2 \rangle \, d\mathbf{x}ds + k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon (\nabla \varphi_2 + \mathbb{J}\nabla \varphi_1) \rangle \, d\mathbf{x}ds \\ & = k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial t} e^\varepsilon(u^\varepsilon) \, d\mathbf{x}ds + k_\varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2 |u_t^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x}ds + O(\sqrt{k_\varepsilon}) \\ & = (\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}^\perp + o(1) = o(1). \end{aligned} \quad (3-28)$$

考虑到式 (3-17), 式 (3-27) 第一行第二项收敛到 $\pi|\lambda(\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t))|$. 因此, 将式 (3-28) 代入式 (3-27) 并且令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就会有

$$\pi|\lambda(\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t))| \leq C|t_2 - t_1|, \quad (3-29)$$

因而 \mathbf{b} 是局部李普希茨的. ■

如定理 2.1 的证明, 我们需要 $\mathbf{j}(u^\varepsilon)$ 的收敛性. 回顾引理 2.9 的证明可知证明的一个关键在于 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ 的连续性. 但是在考虑 CGL 相关情况时, 该函数的连续性不像 NLS 极限动量的连续性那么显然. 为此, 需要先给出一个关于 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ 连续性的引理:

引理 3.2: u^ε 是定义在 $\mathbb{T}^2 \times [0, T]$ 上的一列函数. 假设存在与 t 无关的常数 C 以及 $\mathbf{Q}^*(t) \in L^1([0, T])$ 使得

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\partial_t u^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x}dt \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3-30)$$

$$\mathbf{Q}(u^\varepsilon(t)) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \rightharpoonup \mathbf{Q}^*(t) \quad \text{于 } L^1([0, T]). \quad (3-31)$$

那么 $\mathbf{Q}^* = (Q_1^*, Q_2^*)^T := \mathbf{Q}^*(t)$ 可以被取成连续的.

此外, 如果存在 $\tau \in [0, T]$ 使得极限动量 (limit momentum) $\tilde{\mathbf{Q}}^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(\tau))$ 存在, 那么还有

$$\mathbf{Q}^*(\tau) = \tilde{\mathbf{Q}}^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(\tau)). \quad (3-32)$$

以上引理的证明需要 Sandier 等^[88]的如下结果:

引理 3.3 (Sandier-Serfaty): 令 u^ε 是定义在 $[0, T] \times \mathbb{T}^2$ 上的函数, 而且满足

$$\begin{cases} E^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq 2N\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} + C, & t \in [0, T], \\ \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\partial_t u^\varepsilon| dx dt \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases} \quad (3-33)$$

记

$$\alpha^\varepsilon := \text{Im}(\overline{u^\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon), \quad \mathbf{V}^\varepsilon = (V_1^\varepsilon, V_2^\varepsilon)^T := \partial_t \mathbf{j}(u^\varepsilon) - \nabla \alpha^\varepsilon, \quad (3-34)$$

并记 \mathbb{T}^2 上拉东测度 (Radon measure) 构成的集合为 $\text{Ra}(\mathbb{T}^2)$. 则存在 $V_1 dx, V_2 dx \in L^2([0, T], \text{Ra}(\mathbb{T}^2))$ 使得对任意 $\phi \in C_0^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T])$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \phi V_k^\varepsilon dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \phi V_k dx dt, \quad k = 1, 2. \quad (3-35)$$

证明 参考 Sandier 等^[88]第三章对其定理 3 的证明. ■

利用以上引理, 我们给出引理 3.2 的证明如下:

证明 $\alpha^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon = (V_1^\varepsilon, V_2^\varepsilon)^T$ 的定义依然如式 (3-34). 则式 (3-30) 以及引理 3.3 可推出存在 $V_k dx \in L^2([0, T], \text{Ra}(\mathbb{T}^2)), k = 1, 2$, 使得对任意 $\phi \in C_0^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T])$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \phi V_k^\varepsilon dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \phi V_k dx dt. \quad (3-36)$$

对任意 $\varphi \in C_0^1([0, T])$, 将 $\phi(\mathbf{x}, t) = \varphi(t)$ 以及式 (3-34) 代入式 (3-36), 可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \varphi V_k dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \varphi V_k^\varepsilon dx dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \varphi \int_{\mathbb{T}^2} (\partial_t j_k(u^\varepsilon) - \partial_k \alpha^\varepsilon) dx dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \varphi \partial_t \left(\int_{\mathbb{T}^2} j_k(u^\varepsilon) dx \right) dt - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \varphi \left(\int_{\mathbb{T}^2} \partial_k \alpha^\varepsilon dx \right) dt \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \dot{\varphi} \left(\int_{\mathbb{T}^2} j_k(u^\varepsilon) dx \right) dt = - \int_0^T \dot{\varphi} Q_k^* dt = \int_0^T \varphi \dot{Q}_k^* dt. \end{aligned} \quad (3-37)$$

因为 $V_k dx \in L^2([0, T], \text{Ra}(\mathbb{T}^2))$, 式 (3-37) 意味着

$$\int_0^T \varphi \dot{Q}_k^* dt \leq \|\varphi\|_{L^2([0, T])} \|V_k dx\|_{L^2([0, T], \text{Ra}(\mathbb{T}^2))}. \quad (3-38)$$

因为 $C_0^1([0, T])$ 在 $L^2([0, T])$ 中是稠密的, 所以由式 (3-38) 可推出 $\dot{Q}_k^* \in L^2([0, T])$.

因此, $\mathbf{Q}^* = (Q_1^*, Q_2^*)^T \in H^1([0, T]) \hookrightarrow C([0, T])$, 进而 \mathbf{Q}^* 可以被取成连续的.

对任意使得极限动量存在的 $\tau \in [0, T]$, 考虑 $U^\varepsilon \in H^1(\mathbb{T}^2 \times [\tau - 1, T])$:

$$U^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u^\varepsilon(\mathbf{x}, t), & t \in [\tau, T], \\ u^\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), & t \in [\tau - 1, \tau]. \end{cases} \quad (3-39)$$

可以验证, U^ε 也满足式 (3-30), 而且

$$\mathbf{Q}(U^\varepsilon(t)) \rightharpoonup \tilde{\mathbf{Q}}^*(t) := \begin{cases} \mathbf{Q}^*(t), & t \geq \tau, \\ \tilde{\mathbf{Q}}^*, & t < \tau. \end{cases} \quad (3-40)$$

因此, 前面关于 \mathbf{Q}^* 连续性的证明对 $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ 依然成立. 结合 $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ 的连续性以及式 (3-40), 最终就得到式 (3-32). \blacksquare

接下来我们证明 $\mathbf{j}(u^\varepsilon)$ 的收敛性.

引理 3.4: 假设 $u^\varepsilon, \mathbf{b}$ 与 T 和引理 3.1 中相同, 则对任意 $T_1 < T$ 以及 $\rho < r_1 := \min_{[0, T_1]} r(\mathbf{b}(t))$,

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}(u_*) \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]), \quad \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}(u_*) \text{ 于 } L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]), \quad (3-41)$$

其中

$$u_*(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}; \mathbf{b}(t), \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))), \quad (3-42)$$

而 $\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))$ 连续且满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{b}_j(t) + 2\pi \mathbb{Z}^2, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (3-43)$$

证明 与引理 2.9 证明第 1 步类似, 通过式 (3-17)、引理 2.3 以及式 (3-12), 可以知道存在 $\mathbf{j}_* \in L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]) \cap L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1])$ 使得

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}_* \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T]) \quad (3-44)$$

$$\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}_* \text{ 于 } L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T]). \quad (3-45)$$

对任意 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])$, 结合式 (3-13)、式 (3-12) 以及式 (3-21), 可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \varphi \nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) \mathrm{d}\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \iint_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} k_\varepsilon \varphi \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon) \mathrm{d}\mathbf{x} + \iint_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{1}{2} |u^\varepsilon|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \iint_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} k_\varepsilon \varphi \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon) \mathrm{d}\mathbf{x} - \iint_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \varphi_t \frac{\lambda}{2} (|u^\varepsilon|^2 - 1) \mathrm{d}\mathbf{x} \right| \\ &\leq \left(k_\varepsilon \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])} + \frac{|\lambda|}{2} \| |u^\varepsilon|^2 - 1 \|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])} \right) \|\varphi\|_{C^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])} \end{aligned}$$

$$\leq C\sqrt{k_\varepsilon}\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])}. \quad (3-46)$$

从而利用与引理 2.9 证明第 2 步类似的过程可以证明 $\nabla \cdot \mathbf{j}_* = 0$. 接下来与引理 2.9 证明第 3 步类似, 利用式 (3-44)、式 (2-55) 和式 (3-42), 可以找到 $\mathbf{g} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 满足

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{j}_*(\mathbf{x}, t) - \mathbf{j}(u_*(\mathbf{x}, t)), \quad (3-47)$$

$$\mathbf{g}(t) = \int_{\mathbb{T}^2} (\mathbf{j}_*(\mathbf{x}, t) - \mathbf{j}(u_*(\mathbf{x}, t))) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}_*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \mathbb{J}\mathbf{q}(t), \quad (3-48)$$

$$\mathbf{Q}(u^\varepsilon(t)) \rightharpoonup \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{j}_*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \mathbf{g}(t) + \mathbb{J}\mathbf{q}(t) \quad \text{于 } L^1([0, T]).$$

结合式 (3-12)、式 (3-21)、式 (3-48) 以及引理 3.2 可知 $\mathbf{g} + \mathbb{J}\mathbf{q}$ 是连续的, 而且如果在 t 时刻 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ 存在, 那么

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t)) = \mathbf{g}(t) + \mathbb{J}\mathbf{q}(t). \quad (3-49)$$

对任意时刻 $t \in [0, T_1]$ 以及 $\mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ 的子列 $\mathbf{Q}(u^{\varepsilon_n}(t))$, 根据式 (3-20) 可知 $\mathbf{Q}(u^{\varepsilon_n}(t))$ 存在收敛子列 $\mathbf{Q}(u^{\varepsilon_{n_k}}(t))$, 而且根据式 (3-49) 可知所有子列都收敛到同一极限 $\mathbf{g}(t) + \mathbb{J}\mathbf{q}(t)$. 因而式 (3-49) 事实上对任意时刻 t 都成立. 最后, 考虑到式 (3-4)、式 (3-49)、式 (3-17)、式 (3-12)、引理 3.2、式 (3-47)、式 (3-44) 以及式 (3-45), 重复引理 2.9 证明第 4 步就可以完成本引理的证明. \blacksquare

与定理 2.1 的证明类似, 还需要估计

$$\int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) + \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon(t))}{|u^\varepsilon(t)|} - \mathbf{j}(u_*(t)) \right|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (3-50)$$

事实上, 考察引理 2.11 的证明, 可以发现其证明重点在于式 (2-127)、式 (2-128) 和式 (2-129) 三个式子. 考虑到式 (3-17)、式 (3-41) 以及式 (3-12), 把式 (2-127)、式 (2-128) 和式 (2-129) 中 $u^\varepsilon, \mathbf{b}$ 替换为由引理 3.1 得到的 $u^\varepsilon, \mathbf{b}$ 后, 这三个式子依然成立. 因而有估计:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b})} \left(e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) d\mathbf{x} dt \leq C \int_0^T \Sigma(t) dt, \quad (3-51)$$

其中

$$\Sigma(t) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))))). \quad (3-52)$$

我们还需要 Sandier 等人^[88]的如下结果, 其证明参考 Sandier 等^[88]中第三章对其推论 7 的证明.

引理 3.5 (Sandier-Serfaty): 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个区域. 给定 $\mathbf{a}_j \in C([0, T]; \Omega)$, $\tilde{d}_j =$

$\pm 1, j = 1, 2, \dots, M$, 而且路径 \mathbf{a}_j 满足 $\mathbf{a}_j(t) \neq \mathbf{a}_k(t), 1 \leq j < k \leq M$. 如果 u^ε 是定义在 $\Omega \times [0, T]$ 上的一列函数, 而且满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^M \tilde{d}_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)}, \quad (3-53)$$

和

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t u^\varepsilon|^2 dx dt \leq C \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \int_{\Omega} e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq 2\pi M \ln \frac{1}{\varepsilon} + C, \quad t \in [0, T], \quad (3-54)$$

那么对任意 $[t_1, t_2] \subset [0, T]$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\partial_t u^\varepsilon|^2 dx dt \geq \pi \sum_{j=1}^M \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{a}}_j|^2 dt. \quad (3-55)$$

3.2 约化动力学规律的证明

证明 假设 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = (\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_{2N}(t))$ 是式 (3-7) 的解, 而且 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t) = (\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_{2N}(t))$ 如引理 3.1 所示. 定义

$$\zeta_j(t) := \sqrt{1 + \lambda^2} |\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{b}_j(t)| = |(I_2 - \lambda d_j \mathbb{J})(\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{b}_j(t))|, \quad (3-56)$$

其中 I_2 是二阶单位矩阵

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-57)$$

为了简单, 本节依然采用记号式 (2-138).

存在 $T_* < T$ 使得对任意 $t < T_*$,

$$\max_{1 \leq j \leq 2N} \zeta_j(t) < r_* := \inf_{t \in [0, T_*]} \min\{r(\mathbf{a}(t)), r(\mathbf{b}(t))\}. \quad (3-58)$$

对任意 $t \in [0, T_*]$, ζ 关于 t 的导数可作如下估计:

$$\begin{aligned} |\dot{\zeta}_j(t)| &\leq |(I_2 - \lambda d_j \mathbb{J})(\dot{\mathbf{a}}_j(t) - \dot{\mathbf{b}}_j(t))| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) - \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| + \left| (I_2 - \lambda d_j \mathbb{J}) \dot{\mathbf{b}}_j(t) + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| \\ &\leq C \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j(t) + \left| (I_2 - \lambda d_j \mathbb{J}) \dot{\mathbf{b}}_j(t) + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right|. \end{aligned} \quad (3-59)$$

最后一个式子成立是由于式 (3-58) 以及 W 的李普希茨性质式 (2-59).

取 \mathbf{v} 满足

$$\mathbf{v}^\perp := -\mathbb{J}\mathbf{v} = \frac{(I_2 - \lambda d_j \mathbb{J})\dot{\mathbf{b}}_j(t) + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t))}{\left| (I_2 - \lambda d_j \mathbb{J})\dot{\mathbf{b}}_j(t) + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right|}, \quad (3-60)$$

并且取 $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)))$ 满足

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}, \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}^\perp, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t)). \quad (3-61)$$

式 (3-61) 意味着

$$\nabla \varphi_2 + \mathbb{J} \nabla \varphi_1 = 0, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t)). \quad (3-62)$$

将 φ_1 代入式 (3-16), 可以得到

$$-\int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \langle \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1 \rangle \mathbf{d}\mathbf{x} + \lambda \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial}{\partial t} J(u^\varepsilon) \varphi_1 \mathbf{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (3-63)$$

通过式 (3-10), 式 (3-63) 左手边第一项可做如下计算:

$$\begin{aligned} & -\int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \langle \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1 \rangle \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= -\int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \langle \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi_2 \rangle \mathbf{d}\mathbf{x} + k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \langle \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon (\nabla \varphi_2 + \mathbb{J} \nabla \varphi_1) \rangle \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial t} e^\varepsilon(u^\varepsilon) \mathbf{d}\mathbf{x} + k_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2 |u_t^\varepsilon|^2 \mathbf{d}\mathbf{x} + k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \langle \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon (\nabla \varphi_2 + \mathbb{J} \nabla \varphi_1) \rangle \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3-64)$$

将式 (3-64) 代入式 (3-63) 可得

$$\begin{aligned} & k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2 \frac{\partial}{\partial t} e^\varepsilon(u^\varepsilon) \mathbf{d}\mathbf{x} + \lambda \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial}{\partial t} J(u^\varepsilon) \varphi_1 \mathbf{d}\mathbf{x} + k_\varepsilon^2 \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2 |u_t^\varepsilon|^2 \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \mathbf{d}\mathbf{x} - k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \langle \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon (\nabla \varphi_2 + \mathbb{J} \nabla \varphi_1) \rangle \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3-65)$$

在 $[t, t+h]$ 上对式 (3-65) 积分, 然后令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 并且注意到式 (3-17)、式 (3-25)、式 (3-21) 以及式 (3-62), 可以得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}^\perp \cdot (\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t)) + d_j \lambda \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t)) \\ &= \mathbf{v}^\perp \cdot ((I_2 - \lambda d_j \mathbb{J})(\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t))) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \mathbf{d}\mathbf{x} \mathbf{d}s. \end{aligned} \quad (3-66)$$

利用式 (3-42)、式 (2-67)、式 (3-60)、式 (3-61)、式 (3-66) 以及式 (2-13), 有

$$\begin{aligned} & \left| (I_2 - \lambda d_j \mathbb{J})\dot{\mathbf{b}}_j(t) + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| \\ &= \mathbf{v}^\perp \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} (I_2 - \lambda d_j \mathbb{J}) \frac{\mathbf{b}_j(t+h) - \mathbf{b}_j(t)}{h} + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle - \langle \text{Hess}(\varphi_1) \mathbf{j}(u_*) , \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \rangle \right) dx ds \\
 &= L_j + K_{1j} + K_{2j} + K_{3j}, \tag{3-67}
 \end{aligned}$$

其中

$$L_j(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\eta) \nabla |u^\varepsilon|, \mathbb{J} \nabla |u^\varepsilon| \rangle dx ds, \tag{3-68}$$

$$K_{j1}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \mathbb{J} \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle dx ds, \tag{3-69}$$

$$K_{j2}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle dx ds, \tag{3-70}$$

$$K_{j3}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi h} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \right\rangle dx ds. \tag{3-71}$$

通过式 (3-41) 和式 (3-61) 可知

$$K_{j2} = 0, K_{j3} = 0. \tag{3-72}$$

引理 3.5 以及式 (3-17) 意味着

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) = E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - \int_0^t ds \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon |\partial_t u^\varepsilon|^2 dx \leq E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - \pi \int_0^t |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 ds. \tag{3-73}$$

将式 (2-58) 和式 (3-7) 代入 $W(\mathbf{a}(t))$ 关于 t 的导数, 就会有

$$\frac{d}{dt} W(\mathbf{a}(t)) = \sum_{j=1}^{2N} \nabla_{a_j} W(\mathbf{a}(t)) \cdot \dot{\mathbf{a}}_j(t) = -\pi \sum_{j=1}^{2N} (\dot{\mathbf{a}}_j(t) - \lambda d_j \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j(t)) \cdot \dot{\mathbf{a}}_j(t) = -\pi |\dot{\mathbf{a}}_j(t)|^2, \tag{3-74}$$

因而

$$\pi \int_0^t |\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 ds + W(\mathbf{a}(t)) \equiv W(\mathbf{a}(0)) = W(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0). \tag{3-75}$$

结合式 (3-73)、式 (3-4)、式 (3-75)、式 (1-41) 以及式 (2-59), 可以得到

$$\begin{aligned}
 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t))) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) - \pi \int_0^t |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 ds - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t)) \right) \\
 &= W(\mathbf{a}(t)) + \pi \int_0^t (|\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 - |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2) ds - W(\mathbf{b}(t)) \\
 &\leq C \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\zeta}_j(s)| ds. \tag{3-76}
 \end{aligned}$$

式 (3-51) 和式 (3-76) 意味着

$$\int_{\mathbb{T}_{3r_*/4}^2(\mathbf{b}(s))} \left(e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) + \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) dx \leq C \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\zeta}_j(s)| ds. \quad (3-77)$$

将式 (3-61)、式 (3-77) 和式 (3-72) 代入式 (3-67) 可得

$$\left| (I_2 - \lambda d_j \mathbb{J}) \mathbf{b}(t) + \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| = K_{1j} + L_j \leq C \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\zeta}_j(s)| ds. \quad (3-78)$$

将式 (3-78) 代入式 (3-59) 可知

$$\sum_{j=1}^{2N} |\dot{\zeta}_j(t)| \leq C \sum_{j=1}^{2N} \zeta_j(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\zeta}_j(s)| ds \text{ 于 } [0, T_*]. \quad (3-79)$$

由式 (3-9)、式 (3-17)、式 (3-3) 和式 (3-56) 可直接得出 $\zeta_j(0) = 0$, 因而式 (3-79) 可以推导出

$$\zeta_j(t) = 0 \quad t \in [0, T_*], \quad (3-80)$$

即在 $[0, T_*]$ 上 $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. 特别地 $\zeta_j(T_*) = 0$ 对任意 $1 \leq j \leq 2N$ 成立. 接下来重复以上证明, 就可以得到 $\zeta_j(t) = 0$ 在 $[0, T)$ 上成立, 也就是说 $\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{b}(t)$ 在 $[0, T)$ 恒成立. 结合 \mathbf{a} 的定义式 (3-7) 以及式 (3-17), 我们就证明了定理 3.1. ■

3.3 方程式 (3-7) 的性质

3.3.1 首次积分

定义

$$\mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a}) := \sum_{j=1}^{2N} \mathbf{a}_j - \lambda \mathbb{J} \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a} \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}. \quad (3-81)$$

引理 3.6: 假设 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 \cdots, \mathbf{a}_{2N})$ 是式 (3-7) 初值为式 (3-9) 的解, 那么由式 (3-81) 定义的 $\mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a})$ 是式 (3-7) 的首次积分, 即

$$\mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a}) := \mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a}(t)) \equiv \mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a}^0). \quad (3-82)$$

证明 求式 (3-81) 关于 t 的导数, 并且注意到式 (3-7)、式 (1-29)、式 (2-58) 以及 F 是偶函数, 因而

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}_\lambda(\mathbf{a}(t)) = \sum_{j=1}^{2N} (\dot{\mathbf{a}}_j(t) - \lambda d_j \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j(t)) = - \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)))$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{2N} 2d_j \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N \\ k \neq j}} d_k \nabla F(\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{a}_k(t)) - \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \right) \\
 &= 2 \sum_{1 \leq j \neq k \leq 2N} d_j d_k \nabla F(\mathbf{a}_j(t) - \mathbf{a}_k(t)) - \left(\sum_{j=1}^{2N} d_j \right) \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) = \mathbf{0}, \quad (3-83)
 \end{aligned}$$

上式可立即推出式 (3-82) . ■

3.3.2 具有特殊对称性的初值的解

引理 3.7: 如果 $N = 1$ 而且初值式 (3-9) 满足

$$\mathbf{a}_1^0 = (0.5, 0.5)^T + (\alpha^0, \beta^0)^T, \quad \mathbf{a}_2^0 = (0.5, 0.5)^T + (-\alpha^0, \beta^0), \quad \mathbf{q}_0 = 2\pi(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0), \quad (3-84)$$

则解 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = (\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t))$ 具有如下形式:

$$\mathbf{a}_1(t) = (0.5, 0.5)^T + (\alpha(t), \beta(t))^T, \quad \mathbf{a}_2(t) = (0.5, 0.5)^T + (-\alpha(t), \beta(t))^T, \quad (3-85)$$

其中 α, β 满足

$$\dot{\alpha} = \frac{-2(\partial_x F(2\alpha, 0) + 4\pi\alpha)}{1 + \lambda^2}, \quad \dot{\beta} = \frac{2\lambda(\partial_x F(2\alpha, 0) + 4\pi\alpha)}{1 + \lambda^2}, \quad (3-86)$$

以上方程初值为

$$\alpha(0) = \alpha^0, \beta(0) = \beta^0. \quad (3-87)$$

特别地, 解 \mathbf{a} 的轨迹是两条直线段.

证明 由式 (1-36) 的对称性可知 F 满足

$$F(x, y) = F(-x, y) = F(x, -y) = F(y, x). \quad (3-88)$$

注意到 $F \in C_0^\infty(\mathbb{T}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$, 因而

$$\partial_x F(0.5, y) = 0, \quad \partial_y F(x, 0.5) = 0, \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad (3-89)$$

以及

$$\partial_x F(0, y) = \partial_x F(1, y) = 0, \quad \partial_y F(x, 0) = \partial_y F(x, 1) = 0, \quad \forall x, y \in (0, 1). \quad (3-90)$$

再根据初值式 (3-84) 和方程式 (3-7) 的对称性, 可以假设解 \mathbf{a} 满足式 (3-85). 将式 (3-85) 代入式 (3-7) 并且注意到式 (3-90) 和式 (2-58), 可以得到

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 = -2\nabla F(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) - 4\pi(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = 2 \begin{pmatrix} -\partial_x F(2\alpha, 0) - 4\pi\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3-91)$$

上式同 $\dot{\mathbf{a}}_1 = (\dot{\alpha}, \dot{\beta})^T$ 意味着式 (3-86). 因为 $\dot{\alpha}/\dot{\beta} \equiv -1/\lambda$, 式 (3-85) 可推出 \mathbf{a} 的轨

迹由两条斜率分别为 $-1/\lambda$ 和 $1/\lambda$ 的线段构成。 ■

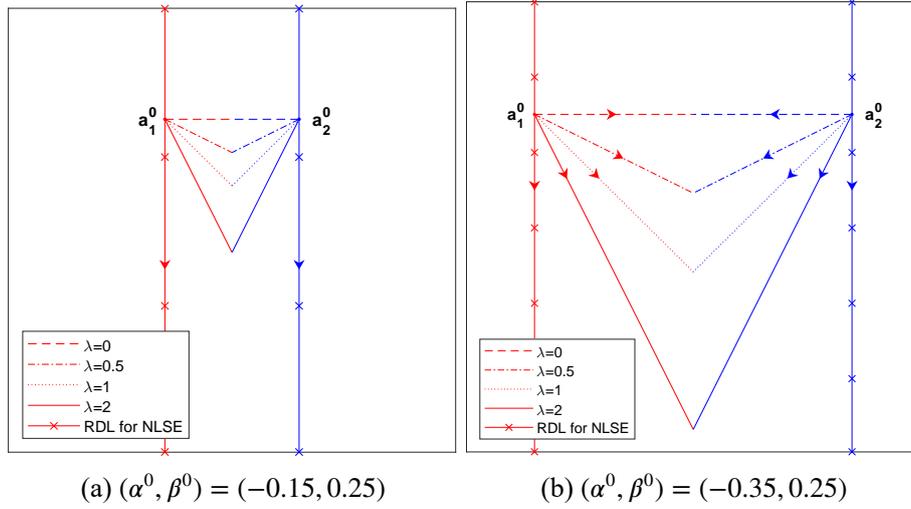


图 3.1 带有不同 λ 的式 (3-7) 解的一些轨迹以及式 (2-7) 的解的轨迹 (标记为“RDL for NLSE”, 初值为式 (3-84) 类型

图 3.1 显示了初值为式 (3-85) 的式 (3-7) 的解的一些数值结果, 我们采用四阶龙格-库塔方法, 其时间步长取为 $\Delta t = 10^{-4}$. 通过图 3.1 可以知道式 (3-7) 的轨迹在 $\lambda \rightarrow 0$ 时收敛到金兹堡-朗道方程对应约化动力学规律的解的轨迹, 而在 $\lambda \rightarrow \infty$ 时收敛到式 (2-7) 解的轨迹.

引理 3.8: 如果 $N = 2$ 而且初值式 (3-9) 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha^0, \beta^0)^T, & \mathbf{a}_2^0 &= (0.5, 0.5)^T + (-\alpha^0, -\beta^0), \\ \mathbf{a}_3^0 &= (0.5, 0.5)^T + (-\alpha^0, \beta^0)^T, & \mathbf{a}_4^0 &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha^0, -\beta^0), \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3-92)$$

则解 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = (\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t), \mathbf{a}_4(t))$ 形如

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(t) &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha(t), \beta(t))^T, & \mathbf{a}_2(t) &= (0.5, 0.5)^T + (-\alpha(t), -\beta(t)), \\ \mathbf{a}_3(t) &= (0.5, 0.5)^T + (-\alpha(t), \beta(t))^T, & \mathbf{a}_4(t) &= (0.5, 0.5)^T + (\alpha(t), -\beta(t)), \end{aligned} \quad (3-93)$$

其中 α, β 满足

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{2}{1 + \lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x F(2\alpha, 2\beta) - \partial_x F(2\alpha, 0) \\ \partial_y F(2\alpha, 2\beta) - \partial_y F(0, 2\beta) \end{pmatrix}. \quad (3-94)$$

证明 由初值式 (3-92) 以及方程式 (3-7) 的对称性, 可以假设 \mathbf{a} 满足式 (3-93). 将式 (3-93) 代入式 (3-7) 并且注意到式 (3-90) 以及式 (2-58), 可以得到

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 = 2(\nabla F(2\alpha, 2\beta) - \nabla F(2\alpha, 0) - \nabla F(0, 2\beta))$$

$$= 2 \begin{pmatrix} \partial_x F(2\alpha, 2\beta) - \partial_x F(2\alpha, 0) \\ \partial_y F(2\alpha, 2\beta) - \partial_y F(0, 2\beta) \end{pmatrix}, \quad (3-95)$$

由上式与式 (3-93) 可直接推出式 (3-94) .

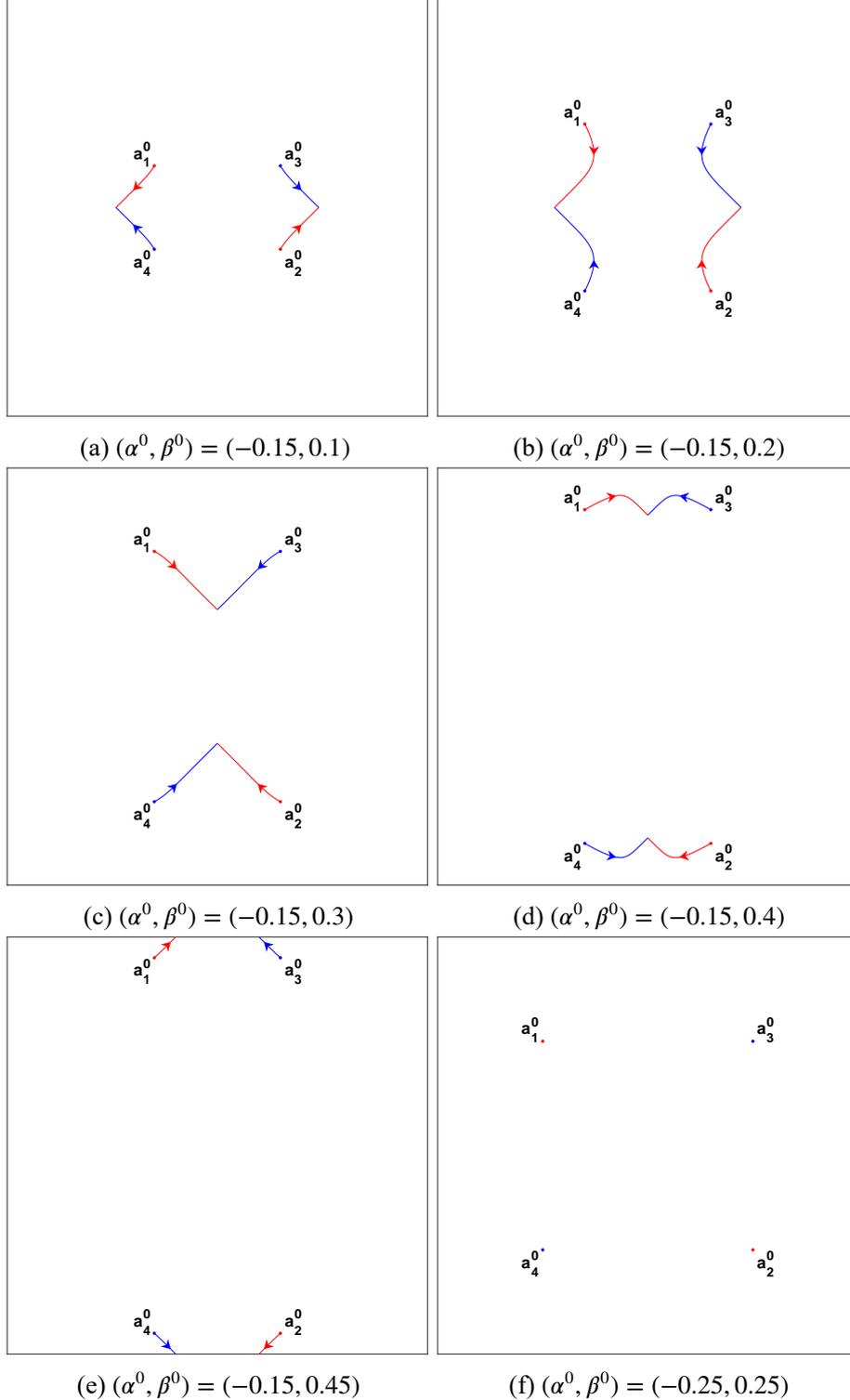


图 3.2 $\lambda = 1$ 的式 (3-7) 的一些解的轨迹, 初值形如式 (3-92)

图 3.2 展示了 $\lambda = 1$ 且初值满足式 (3-85) 的式 (3-7) 一些解的数值结果, 我们采用四阶龙格-库塔方法, 其时间步长取为 $\Delta t = 10^{-4}$. 图 3.2 中图 3.2(a)- 图 3.2(e) 5 张图给出了 α^0 固定时的一些典型轨迹线: (1) 当 β^0 比较小时, \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_4 最终碰撞, 而 \mathbf{a}_2 与 \mathbf{a}_3 碰撞; (2) 当 β^0 增加时, \mathbf{a}_1 会逐渐靠近 \mathbf{a}_3 , 而且如果 β^0 足够大, \mathbf{a}_1 会和 \mathbf{a}_3 碰撞, 而 \mathbf{a}_2 会和 \mathbf{a}_4 碰撞; (3) 当 β^0 足够接近 0.5 时, \mathbf{a}_1 会和 \mathbf{a}_4 相碰撞, 但其方向与 (1) 中不同. 图 3.2(f) 展示了一个平衡态, 其为一个平衡态成立是因为式 (3-89) 以及式 (3-90).

第 4 章 非线性波方程量化涡旋的约化动力学规律

本章主要研究非线性波方程 (NLW)

$$k_\varepsilon \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} (|u^\varepsilon|^2 - 1) u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (4-1)$$

的量化涡旋动力学规律, 其初值为

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \partial_t u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_1^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2. \quad (4-2)$$

此外, 动量 \mathbf{Q} 、流量 \mathbf{j} 由式 (1-28) 定义, 能量 E^ε 、能量密度 e^ε 由式 (1-27) 定义, 重整化能量 W 、带参数 ε 的重整化能量 W_ε 、雅可比行列式 J 以及 $(\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 等分别由式 (1-35)、式 (1-41)、式 (1-42)、式 (1-40) 等定义, 而在第 2.1 节有 $r(\mathbf{a})$ 、规范调和映射等的定义, 在此不再赘述.

我们将主要结论, 即定理 1.3, 复述如下:

定理 4.1 (NLW 的约化动力学规律): 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi\mathbb{Z}^2$ 使得初值式 (4-2) 中 $u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ 满足

$$J(u_0^\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0}, \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2) := [C^1(\mathbb{T}^2)]', \quad (4-3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon) = \mathbf{Q}_0 = \mathbb{J} \mathbf{q}_0, \quad (4-4)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} [E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0)] = 0. \quad (4-5)$$

以及

$$k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} |u_1^\varepsilon|^2 dx \rightarrow 0. \quad (4-6)$$

则可以找到 $T > 0$ 以及 $2N$ 个 $C^{1,1}$ -路径 $\mathbf{a}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (4-2) 的方程式 (4-1) 的解 u^ε 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (4-7)$$

而且 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律 (该方程简记为 NLWODE):

$$\ddot{\mathbf{a}}_j = -\frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})), \quad t > 0, \quad (4-8)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j(t) + 2\pi\mathbb{Z}^2, \quad (4-9)$$

而且方程式 (4-8) 初值如下:

$$\mathbf{a}_j(0) = \mathbf{a}_j^0, \quad \dot{\mathbf{a}}_j(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_0. \quad (4-10)$$

定理 4.1 证明基于本人的相关文章^[89].

4.1 量化涡旋的存在性

首先定义 NLW 系统的哈密顿量 (Hamiltonian) 为

$$h^\varepsilon(u^\varepsilon) := \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 + e^\varepsilon(u^\varepsilon), \quad (4-11)$$

接下来我们介绍与方程式 (4-1) 有关的守恒量. 与第 3.1 章式 (3-10) 到式 (3-16) 等式子类似, 可以得到式 (4-1) 的任意解 u^ε 满足如下等式^[53-54]:

$$\frac{\partial}{\partial t} h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = \nabla \cdot (\operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon)), \quad (4-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = k_\varepsilon \partial_t \operatorname{Im}(\overline{u_t^\varepsilon} u^\varepsilon), \quad (4-13)$$

$$\begin{aligned} H^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) &:= \int_{\mathbb{T}^2} h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} + E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \\ &\equiv \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_1^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + E^\varepsilon(u_0^\varepsilon). \end{aligned} \quad (4-14)$$

而且对任意 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ^[54]

$$k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \varphi \partial_t^2 h^\varepsilon(u^\varepsilon) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \operatorname{Hess}(\varphi) \nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon \rangle + \left(\frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 - e^\varepsilon(u^\varepsilon) \right) \Delta \varphi \right) d\mathbf{x}. \quad (4-15)$$

4.1.1 雅可比行列式与流量的收敛性

引理 4.1: 如果初值 u_0^ε 满足式 (4-3)、式 (4-4) 以及式 (4-5), 那么存在 $C^{1,1}$ -路径 $\mathbf{b}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2, j = 1, \dots, 2N$, 使得

$$J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j(t)}, \quad k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{b}_j(t)} \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2). \quad (4-16)$$

证明 记

$$r_0 = r(\mathbf{a}^0) = \frac{1}{4} \min_{j \neq k} |\mathbf{a}_j^0 - \mathbf{a}_k^0| > 0. \quad (4-17)$$

与引理 2.8 证明第 1 步类似, 通过引理 2.3、式 (4-3)、式 (4-5)、式 (4-14) 以及式 (1-41) 可知, 对充分小的 ε , 存在 $T^\varepsilon > 0$ 以及 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t) \in B_{r_0/2}(\mathbf{a}_j^0)$ 使得下面的式子对任意 $t < T^\varepsilon$ 成立:

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq H^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq 2N\pi \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + C, \quad (4-18)$$

$$\left\| J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = o(1), \quad (4-19)$$

$$\left\| k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = o(1), \quad (4-20)$$

$$\int_{\mathbb{T}_{3r_0/4}^2(\mathbf{a}^0)} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \leq C, \quad \|j(u^\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq C, \quad (4-21)$$

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq 2N\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} - C. \quad (4-22)$$

式 (4-22) 和式 (4-18) 意味着

$$k_\varepsilon \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C, \quad (4-23)$$

$$\|k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - k_\varepsilon h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t))\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} = k_\varepsilon^2 \| |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 \|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq Ck_\varepsilon. \quad (4-24)$$

接下来我们估计 $|\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)|$: 可以找到 $\eta \in C_0^\infty(B_{r_0}(\mathbf{a}_j^0))$ 满足

$$\eta(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)) \cdot \frac{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)}{|\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)|}, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0), \quad (4-25)$$

则结合式 (4-20)、式 (4-24)、式 (4-12)、式 (4-18) 以及式 (4-23), 可以得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)| &= \int_{t_1}^{t_2} \int k_\varepsilon \eta \partial_t h^\varepsilon d\mathbf{x} dt + o(1) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \left\langle \nabla \eta, \operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) \right\rangle d\mathbf{x} dt + o(1) \\ &\leq \|\nabla \eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt + o(1) \\ &\leq C|t_2 - t_1| + o(1). \end{aligned} \quad (4-26)$$

剩下的与引理 2.8 证明第 3 步和第 4 步类似: 可以找到李普希茨的路径 \mathbf{b}_j 以及 $T > 0$ 使得在 $[0, T)$ 中 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbf{b}_j(t)$. 而且考虑到式 (4-19)、式 (4-20) 以及式 (4-3), 可知式 (4-16) 成立, 而且

$$\mathbf{b}_j(0) = \mathbf{a}_j^0. \quad (4-27)$$

接下来我们证明 $\mathbf{b}_j \in C^{1,1}([0, T], \mathbb{T}^2)$. 定义

$$\zeta^h(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq h, \\ \frac{1}{h} - \frac{|t|}{h^2}, & |t| \leq h. \end{cases} \quad (4-28)$$

对任意向量 \mathbf{v} , 存在 $\eta \in C_0^\infty(B_{r_0}(\mathbf{a}_j^0))$ 满足

$$\eta(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0). \quad (4-29)$$

则结合式 (4-16)、式 (4-24)、式 (4-28)、式 (4-15)、式 (4-21) 和式 (4-23), 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{h^2} (\mathbf{b}_j(t-h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t+h)) \cdot \mathbf{v} = \frac{\pi}{h^2} (\eta(\mathbf{b}_j(t-h)) - 2\eta(\mathbf{b}_j(t)) + \eta(\mathbf{b}_j(t+h))) \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{T}^2} \eta k_\varepsilon (h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t-h)) - 2h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) + h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t+h))) dx \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \eta k_\varepsilon \partial_t^2 h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, s)) dx ds \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \text{Hess}(\eta) \nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon \rangle + \Delta \eta \left(\frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 - e^\varepsilon(u^\varepsilon) \right) \right) dx ds \\ & \leq \|\eta\|_{C^2(\mathbb{T}^2)} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} C \sup_{s \in [t-h, t+h]} \int_{B_{r_0} \setminus B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0)} h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, s)) dx \leq C. \end{aligned} \quad (4-30)$$

将 $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}_j(t-h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t+h)}{|\mathbf{b}_j(t-h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t+h)|}$ (或者在 $\mathbf{b}_j(t-h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t+h) = \mathbf{0}$ 时, 取 \mathbf{v} 为任意单位向量) 代入式 (4-30), 可以得到对任意 $t \in [0, T]$ 与 $0 < h \ll 1$,

$$\frac{\pi}{h^2} |\mathbf{b}_j(t-h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t+h)| \leq C, \quad (4-31)$$

因而 $\mathbf{b}_j \in C^{1,1}([0, T], \mathbb{T}^2)$. ■

利用在引理 4.1 中得到的 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t) = (\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_{2N}(t))^T$, 可以定义

$$u_* := u_*(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}; \mathbf{b}(t), \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))), \quad (4-32)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))$ 连续且满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(0)) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{b}_j(t) + 2\pi \mathbb{Z}^2, \quad (4-33)$$

而 $H(\mathbf{x}; \mathbf{b}(t), \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))$ 由式 (2-41) 定义.

引理 4.2: 假设 $u^\varepsilon, \mathbf{b}$ 由引理 4.1 给出, 则对任意 $T_1 < T$ 以及 $\rho < r_1 := \min_{t \in [0, T_1]} r(\mathbf{b}(t))$,

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}(u_*) \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]), \quad \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}(u_*) \text{ 于 } L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (4-34)$$

证明 本引理证明本质上和引理 3.4 的证明一样, 仅有的区别在于证明

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_* - \mathbf{j}(u_*)) = 0, \quad (4-35)$$

其中 \mathbf{j}_* 满足

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}_* \quad \text{于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]), \quad \mathbf{j}(u^\varepsilon) = |u^\varepsilon| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}_* \quad \text{于 } L^1(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (4-36)$$

\mathbf{j}_* 存在性的证明和引理 2.9 的证明第 1 步一样, 在此不再详述.

由式 (4-18) 与式 (1-27) 可知

$$\| |u^\varepsilon|^2 - 1 \|_{L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)))} \leq C\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (4-37)$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])$, 结合式 (4-36)、式 (4-13)、式 (4-37) 以及式 (4-23), 可以得到

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}_* \, dx dt \right| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) \, dx dt \right| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} \varphi \nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) \, dx dt \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} k_\varepsilon \varphi \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon) \, dx dt \right| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]} k_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \varphi \operatorname{Im}(\overline{u^\varepsilon} u_t^\varepsilon) \, dx dt \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C k_\varepsilon \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1])} = 0, \end{aligned} \quad (4-38)$$

因而 $\nabla \cdot \mathbf{j}_* = 0$. 则由式 (2-55) 和式 (4-32) 可推出

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_* - \mathbf{j}(u_*)) = 0. \quad (4-39)$$

然后重复引理 3.4 的证明的剩余部分即可完成本引理的证明. \blacksquare

4.1.2 解的能量下界估计

与式 (3-51) 类似, 通过式 (4-16) 与式 (4-34), 重复引理 2.11 的证明可知, 对任意 $0 \leq t_1 < t_2 < T$ 以及 $\rho < \min_{t \in [t_1, t_2]} r(\mathbf{b}(t))$, 下式成立:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^\varepsilon (|u^\varepsilon|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) dx dt \leq C \int_{t_1}^{t_2} \Sigma(t) dt, \quad (4-40)$$

其中

$$\Sigma(t) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))). \quad (4-41)$$

因为式 (4-40) 左手边恒非负, 所以 $\Sigma(t) \geq 0$, 即

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))) \geq 0. \quad (4-42)$$

记 $\Omega_t = \cup_{j=1}^{2N} B_\rho(\mathbf{b}_j(t))$. 取 $|t_2 - t_1|$ 充分小使得 $\mathbf{a}_j(s) \in \Omega_t$ 对任意 $s, t \in [t_1, t_2]$ 成

立. 再考虑到式 (4-16), 下式成立

$$J(u^\varepsilon(s)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{b_j(s)} \quad \text{于 } W^{-1,1}(\Omega_t). \quad (4-43)$$

结合 $\Omega_t \subset \mathbb{T}^2$ 、式 (4-23) 以及式 (4-18) 可知对任意 $s, t \in [t_1, t_2]$, 有

$$\int_{\Omega_t \times [t_1, t_2]} |u_t^\varepsilon|^2 dx ds \leq C |\ln \varepsilon|, \quad \int_{\Omega_t} e^\varepsilon(u^\varepsilon(s)) dx \leq 2N\pi |\ln \varepsilon| + C. \quad (4-44)$$

则引理 3.5、式 (4-43) 以及式 (4-44) 意味着

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2 \times [t_1, t_2]} |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 dx ds \\ & \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon \int_{\Omega_t \times [t_1, t_2]} |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 dx ds \geq \pi \sum_{j=1}^{2N} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{b}_j(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (4-45)$$

4.2 约化动力学规律的证明

证明 假设 \mathbf{a} 是式 (4-8) 的解, 而 \mathbf{b} 如引理 4.1 给出. 定义

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{2N} (|\mathbf{b}_j(t) - \mathbf{a}_j(t)| + |\dot{\mathbf{b}}_j(t) - \dot{\mathbf{a}}_j(t)|). \quad (4-46)$$

与定理 2.1 证明类似, 可以找到 $T_* < T$ 满足

$$\sup_{t \in [0, T_*]} \zeta(t) < r_* := \inf_{t \in [0, T_*]} \min\{r(\mathbf{a}(t)), r(\mathbf{b}(t))\}. \quad (4-47)$$

为了简单, 本节依然采用记号式 (2-138).

我们首先验证 $\dot{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{0}$. 式 (4-45)、式 (4-14)、式 (4-5)、式 (4-42) 以及式 (4-27) 意味着

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2h} \int_0^h |\dot{\mathbf{b}}(t)|^2 dt \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx dt \\ & = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{T}^2} (h^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - e^\varepsilon(u^\varepsilon(t))) dx dt \\ & \leq \frac{1}{h} \int_0^h (W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t))) dt \leq C \frac{1}{h} \int_0^h |\mathbf{a}_j^0 - \mathbf{b}_j(t)| dt \leq Ch. \end{aligned} \quad (4-48)$$

令式 (4-48) 两端 $h \rightarrow 0$, 可以得到 $\dot{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{0}$. 再考虑到式 (4-46)、式 (4-10) 以及式 (4-27), 就会有

$$\zeta(0) = 0. \quad (4-49)$$

对 $t \in [0, T_*]$, 取 ζ 关于 t 的导数. 注意到式 (4-8)、式 (4-46) 以及式 (2-59)

, 有

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}(t) &\leq \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\mathbf{b}}_j(t) - \dot{\mathbf{a}}_j(t)| + |\ddot{\mathbf{b}}_j(t) - \ddot{\mathbf{a}}_j(t)| \\
 &\leq \zeta(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left| \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) + \pi \ddot{\mathbf{b}}_j(t) \right| + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left| \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) - \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2N} |\mathbf{A}_j(t)| + C\zeta(t), \tag{4-50}
 \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A}_j(t) = \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) + \pi \ddot{\mathbf{b}}_j(t). \tag{4-51}$$

取 $\mathbf{v} = \mathbf{A}_j(t)/|\mathbf{A}_j(t)|$ (或者在 $\mathbf{A}_j(t) = \mathbf{0}$ 时取 \mathbf{v} 为任意单位向量), 将其代入式 (4-51), 可以得到

$$\mathbf{A}_j(t) \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{A}_j(t)|. \tag{4-52}$$

存在 $\eta \in C_0^\infty(B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)))$ 满足

$$\eta(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}, \quad \nabla \eta(\mathbf{x}) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t)). \tag{4-53}$$

回顾 ζ^h 的定义式 (4-28), 式 (4-30) 和式 (4-53) 意味着

$$\begin{aligned}
 \pi \ddot{\mathbf{b}}_j(t) \cdot \mathbf{v} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi}{h^2} (\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t-h)) \cdot \mathbf{v} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \text{Hess}(\eta) \nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon \rangle + \Delta \eta \left(\frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 - e^\varepsilon(u^\varepsilon) \right) \right) dx ds. \tag{4-54}
 \end{aligned}$$

式 (2-68)、式 (4-32) 和式 (4-53) 可推导出

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \nabla \eta(\mathbf{b}_j(s)) \cdot \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}_j(s)) ds \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*), \mathbf{j}(u_*) \rangle - \Delta \eta \frac{1}{2} |\mathbf{j}(u_*)|^2 \right) dx ds. \tag{4-55}
 \end{aligned}$$

结合式 (4-51)、式 (4-52)、式 (4-54)、式 (4-55) 以及式 (2-13), 可以得到

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}_j(t)| &= \pi \ddot{\mathbf{b}}_j(t) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \text{Hess}(\eta) \nabla u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon \rangle + \Delta \eta \left(\frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 - e^\varepsilon(u^\varepsilon) \right) \right) dx ds \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left(\langle \text{Hess}(\eta) \mathbf{j}(u_*), \mathbf{j}(u_*) \rangle - \Delta \eta \frac{1}{2} |\mathbf{j}(u_*)|^2 \right) dx ds \\
 &= I_1 + I_2 + I_3, \tag{4-56}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} (\langle \text{Hess}(\eta) \nabla |u^\varepsilon|, \nabla |u^\varepsilon| \rangle - \Delta \eta e^\varepsilon(|u^\varepsilon|)) \, dx ds \\
 &+ \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\eta) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle \, dx ds \\
 &- \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \Delta \eta \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \, dx ds, \tag{4-57}
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \Delta \eta |u_t^\varepsilon|^2 \, dx ds, \tag{4-58}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} 2 \left\langle \text{Hess}(\eta) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \mathbf{j}(u_*) \right\rangle \, dx ds \\
 &- \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \Delta \eta \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \cdot \mathbf{j}(u_*) \, dx ds. \tag{4-59}
 \end{aligned}$$

式 (4-34) 可直接推出

$$I_3 = 0. \tag{4-60}$$

为了估计 I_1 , 结合式 (4-14) 与式 (4-5), 有如下估计

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) = \int_{\mathbb{T}^2} h^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \, dx - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 \, dx \leq W_\varepsilon(\mathbf{a}^0) - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 \, dx + o(1). \tag{4-61}$$

取 $W(\mathbf{a}(t)) + \frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(t)|^2$ 关于 t 的导数并且注意到式 (4-8), 可以得到

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(W(\mathbf{a}(t)) + \frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(t)|^2 \right) &= \sum_{j=1}^{2N} \left(\dot{\mathbf{a}}_j(t) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) + \pi \dot{\mathbf{a}}_j(t) \cdot \ddot{\mathbf{a}}_j(t) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{2N} \left(\dot{\mathbf{a}}_j(t) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) - \dot{\mathbf{a}}_j(t) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) \right) = 0, \tag{4-62}
 \end{aligned}$$

因而有守恒律:

$$W(\mathbf{a}(t)) + \frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(t)|^2 \equiv W(\mathbf{a}(0)) = W(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0). \tag{4-63}$$

结合式 (4-63)、式 (1-41)、式 (2-59) 以及式 (4-61) 可知

$$\begin{aligned}
 E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) &\leq W_\varepsilon(\mathbf{a}(t)) + \frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(t)|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 \, dx + o(1) \\
 &\leq W_\varepsilon(\mathbf{b}(t)) + C\zeta(t) + \frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(t)|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 \, dx + o(1). \tag{4-64}
 \end{aligned}$$

上式与式 (4-57)、式 (4-53)、式 (4-45) 以及式 (4-40) 可推出

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t+h} \int_{B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)) \setminus B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} \left(\left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 + e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) \right) d\mathbf{x} ds \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t+h} \left(\frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + C\zeta(s) \right) ds \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} C \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t+h} \left(\frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 - \frac{\pi}{2} |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 \right) ds + C\zeta(t) \leq C\zeta(t). \tag{4-65}
 \end{aligned}$$

接下来我们估计 I_2 . 结合式 (4-14)、式 (4-5)、式 (4-63)、式 (4-42) 以及式 (1-41) 可知

$$\begin{aligned}
 &\int_{B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)) \setminus B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} \\
 &\leq 2(H^\varepsilon(u^\varepsilon(s)) - E^\varepsilon(u^\varepsilon(s))) - \sum_{j=1}^{2N} \int_{R_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} \\
 &\leq 2W_\varepsilon(\mathbf{a}(s)) + \pi |\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 - 2W_\varepsilon(\mathbf{b}(s)) - \pi |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 \\
 &\quad + \pi |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 - \sum_{j=1}^{2N} \int_{R_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + o(1) \\
 &\leq C\zeta(s) + \pi |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 - \sum_{j=1}^{2N} \int_{R_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + o(1). \tag{4-66}
 \end{aligned}$$

上式与式 (4-58)、式 (4-53) 以及式 (4-45) 意味着

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C}{h} \int_{t-h}^{t+h} \int_{B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)) \setminus B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} ds \\
 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C}{h} \int_{t-h}^{t+h} \left(C\zeta(s) + \pi |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 - \sum_{j=1}^{2N} \int_{R_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t))} k_\varepsilon |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} \right) ds \\
 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{C}{h} \int_{t-h}^{t+h} (C\zeta(s) + \pi |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 - \pi |\dot{\mathbf{b}}(s)|^2) ds \leq C\zeta(t). \tag{4-67}
 \end{aligned}$$

将式 (4-56)、式 (4-65)、式 (4-67) 以及式 (4-60) 代入式 (4-50), 可以得到

$$\zeta(t) \leq C\zeta(t), t \in [0, T_*]. \tag{4-68}$$

上式与式 (4-49) 结合可得

$$\zeta(t) = 0, t \in [0, T_*]. \tag{4-69}$$

结合式 (4-46) 与式 (4-69), 就会有 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{b}(t)$. 再考虑到式 (4-16) 以及 \mathbf{a} 满足式 (4-8), 就完成了证明. ■

4.3 量化涡旋偶极子的数值计算

动量 $\mathbf{Q}(u_0^\varepsilon)$ 对式 (4-1) 的量化涡旋的运动有很大的影响. 在本节中, 利用定理 4.1, 我们可以研究动量对式 (4-1) 量化涡旋动力学在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时的影响. 我们采用的方法为数值求解式 (4-8), 并取初值式 (4-10) 满足 $\mathbb{J}\mathbf{q}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon)$.

我们专注于量化涡旋偶极子 (dipole), 也就是 $N = 1$ 的情况. 我们利用四阶龙格-库塔方法对式 (4-8) 求解, 并且取时间步长为 $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$. 结果如图 4.1 和图 4.2 所示.

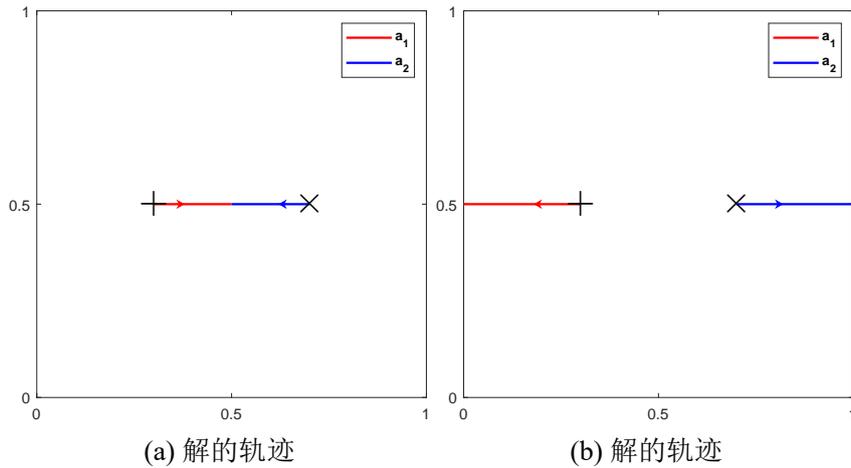


图 4.1 式 (4-8) 解的轨迹, $N = 1$ 且初值式 (4-10) 取为: (a) $\mathbf{a}_1^0 = (0.3, 0)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.7, 0)^T, \mathbf{q}_0 = 2\pi(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0)$, (b) $\mathbf{a}_1^0 = (0.3, 0)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.7, 0)^T, \mathbf{q}_0 = 2\pi(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0 + (1, 0)^T)$. 在本图与剩余的图中, + 和 \times 分别表示环绕数为 +1 和 -1 的量化涡旋

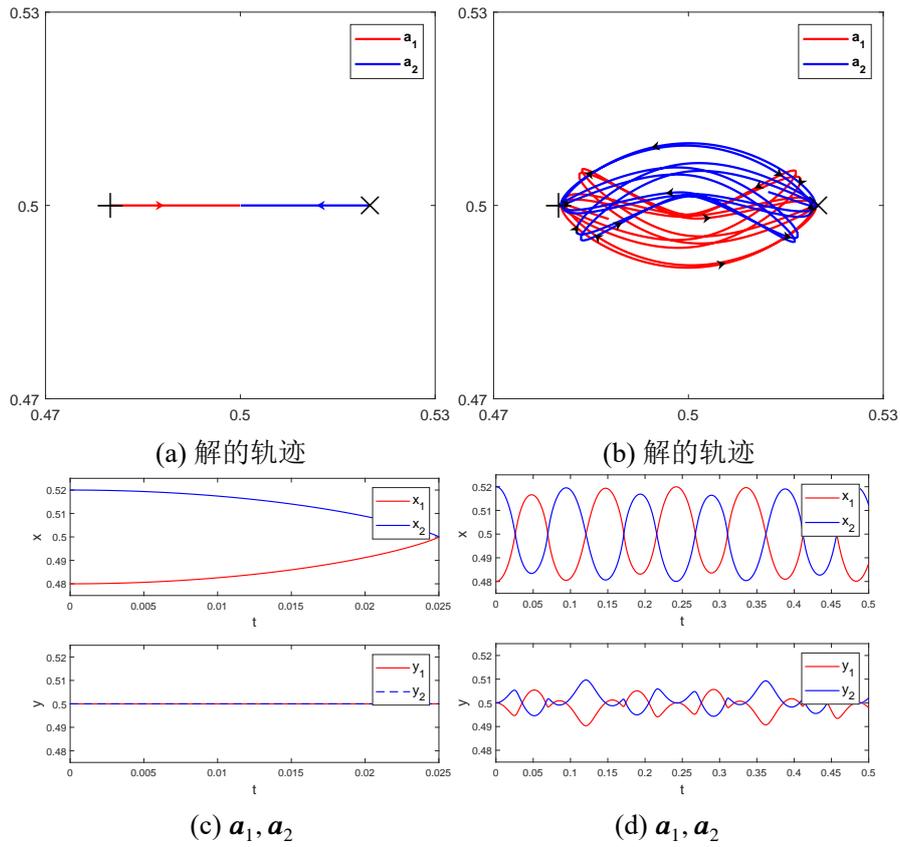


图 4.2 式 (4-8) 解的路径以及 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)^T, \mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)^T$ 的值. 其中 $N = 1$ 而且初值式 (4-10) 分别为: (a)(c) $\mathbf{a}_1^0 = (0.48, 0)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.52, 0)^T, \mathbf{q}_0 = 2\pi(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0)$, (b)(d) $\mathbf{a}_1^0 = (0.48, 0)^T, \mathbf{a}_2^0 = (0.52, 0)^T, \mathbf{q}_0 = 2\pi(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0 + (0, 2)^T)$

第 5 章 带波算子的非线性薛定谔方程量化涡旋的约化动力学规律

本章研究带波算子的非线性薛定谔方程（简记为 NLSW）

$$-i\partial_t u^\varepsilon + \mu k_\varepsilon \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (5-1)$$

的量化涡旋动力学规律, 其初值为

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \partial_t u^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_1^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^2. \quad (5-2)$$

此外, 动量 \mathbf{Q} 、流量 \mathbf{j} 由式 (1-28) 定义, 能量 E^ε 、能量密度 e^ε 由式 (1-27) 定义, 重整化能量 W 、带参数 ε 的重整化能量 W_ε 、雅可比行列式 J 以及 $(\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 等分别由式 (1-35)、式 (1-41)、式 (1-42)、式 (1-40) 等定义, 而在第 2.1 节有 $r(\mathbf{a})$ 、规范调和映射等的定义, 在此不再赘述.

我们将主要结论, 即定理 1.4, 复述如下:

定理 5.1 (NLSW 的约化动力学规律): 假设存在 $\mathbf{a}^0 := (\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_{2N}^0) \in (\mathbb{T}^2)_*^{2N}$ 与 $\mathbf{q}_0 \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{a}_j^0 + 2\pi\mathbb{Z}^2$ 使得初值式 (5-2) 中 $u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ 满足

$$J(u_0^\varepsilon) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j^0}, \quad \text{于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2) := [C^1(\mathbb{T}^2)]', \quad (5-3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u_0^\varepsilon) = \mathbf{Q}_0 = \mathbb{J}\mathbf{q}_0, \quad (5-4)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} [E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) - W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0)] = 0. \quad (5-5)$$

以及

$$k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} |u_1^\varepsilon| dx \rightarrow 0. \quad (5-6)$$

则可以找到 $T > 0$ 以及 $2N$ 个 $C^{1,1}$ -路径 $\mathbf{a}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2$ 使得初值为式 (5-2) 的方程式 (5-1) 的解 u^ε 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (5-7)$$

而且 $\mathbf{a}_j(t)$ ($1 \leq j \leq 2N$) 满足如下约化动力学规律（以下方程简记为 NLSWRDL）:

$$\mu \ddot{\mathbf{a}}_j + d_j \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j = -\frac{1}{\pi} \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}; \mathbf{q}_*(\mathbf{a})), \quad t > 0, \quad (5-8)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{a}) = \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(t))$ 满足

$$J(u^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{a}_j(t)} \text{ 于 } W^{-1,1}(\mathbb{T}^2), \quad (5-9)$$

而且方程式 (5-8) 初值由

$$\mathbf{a}_j(0) = \mathbf{a}_j^0, \quad \dot{\mathbf{a}}_j(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{a}(0)) = \mathbf{q}_0 \quad (5-10)$$

给出.

定理 5.1 证明基于本人的相关文章^[90].

5.1 量化涡旋的存在性

在本节, 我们列举出与式 (5-1) 有关的一些等式.

定义哈密顿量 (Hamiltonian) $h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon)$ ^[55] 为:

$$h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon) := \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 + e^\varepsilon(u^\varepsilon). \quad (5-11)$$

则与 4.1 中式 (4-12) - 式 (4-15) 类似, 对方程式 (5-1) 的任意解 u^ε , 下面的式子成立:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = \nabla \cdot (\operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon)), \quad (5-12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) = \mu k_\varepsilon \partial_t \operatorname{Im}(\overline{u_t^\varepsilon} u_t^\varepsilon) - \frac{1}{2} \partial_t |u_t^\varepsilon|^2, \quad (5-13)$$

$$H_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) := \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 dx + E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \equiv \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_1^\varepsilon|^2 dx + E^\varepsilon(u_0^\varepsilon). \quad (5-14)$$

对任意 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, 有

$$- \int_{\mathbb{T}^2} \mu k_\varepsilon \partial_t \langle \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon, u_t^\varepsilon \nabla \varphi \rangle dx - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\partial}{\partial t} J(u^\varepsilon) \varphi dx = \int_{\mathbb{T}^2} \langle \operatorname{Hess}(\varphi) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle dx. \quad (5-15)$$

5.1.1 雅可比行列式的收敛性

引理 5.1: 如果初值式 (5-1) 中 u_0^ε 满足式 (5-3) 与式 (5-5), 那么存在 $C^{1,1}$ -路径 $\mathbf{b}_j : [0, T) \rightarrow \mathbb{T}^2$ 满足

$$J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j(t)}, \quad k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) \rightarrow \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{b}_j(t)}. \quad (5-16)$$

证明 首先记

$$r_0 = r(\mathbf{a}^0) = \frac{1}{4} \min_{j \neq k} |\mathbf{a}_j^0 - \mathbf{a}_k^0| > 0. \quad (5-17)$$

式 (5-5) 与式 (5-14) 意味着存在常数 $C > 0$ 使得对任意充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq H_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \leq 2N\pi \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + C. \quad (5-18)$$

与引理 2.8 证明的第 1 步类似, 引理 2.3、式 (5-3) 与式 (5-18) 意味着存在 $T^\varepsilon, \varepsilon_0$ 使得任意 $0 < t < T^\varepsilon, \varepsilon < \varepsilon_0$, 存在 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t) \in B_{r_0/2}(\mathbf{a}_j^0), j = 1, \dots, 2N$, 使得

$$\begin{aligned} \left\| J(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}} &= o(1), \\ \left\| k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - \pi \sum_{j=1}^{2N} \delta_{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)} \right\|_{W^{-1,1}} &= o(1), \end{aligned} \quad (5-19)$$

$$\int_{\mathbb{T}_{3r_0/4}^2(\mathbf{a}^0)} e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \leq C, \quad \|\mathbf{j}(u^\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq C, \quad (5-20)$$

$$E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq 2N\pi \ln \frac{1}{\varepsilon} - C. \quad (5-21)$$

式 (5-21) 和式 (5-18) 意味着

$$k_\varepsilon \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C \quad (5-22)$$

以及

$$\|k_\varepsilon e^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t)) - k_\varepsilon h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t))\|_{W^{-1,1}} = \frac{\mu k_\varepsilon^2}{2} \| |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 \|_{W^{-1,1}} \leq C k_\varepsilon. \quad (5-23)$$

接下来估计 $|\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)|$: 可以找到 $\eta \in C_0^\infty(B_{r_0}(\mathbf{a}_j^0))$ 满足

$$\eta(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)) \cdot \frac{\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)}{|\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)|}, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0). \quad (5-24)$$

结合式 (5-19)、式 (5-23)、式 (5-12)、式 (5-18) 以及式 (5-22), 有

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2) - \mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)| &= \eta(\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_2)) - \eta(\mathbf{b}_j^\varepsilon(t_1)) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \eta(\mathbf{x}) (h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t_2)) - h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(\mathbf{x}, t_1))) d\mathbf{x} + o(1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int k_\varepsilon \eta \partial_t h_\mu^\varepsilon d\mathbf{x} dt + o(1) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \left\langle \nabla \eta, \operatorname{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon) \right\rangle d\mathbf{x} dt + o(1) \\ &\leq \|\nabla \eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} k_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt + o(1) \\ &\leq C |t_2 - t_1| + o(1). \end{aligned} \quad (5-25)$$

接下来重复引理 2.8 证明第 3 步和第 4 步可以知道: 存在李普希茨的路径 \mathbf{b}_j 以及

$T > 0$ 使得在 $[0, T_0]$ 中 $\mathbf{b}_j^\varepsilon(t)$ 一致收敛到 $\mathbf{b}_j(t)$, 其与式 (5-19) 意味着式 (5-16). 特别地, 式 (5-3) 和式 (5-16) 意味着

$$\mathbf{b}_j(0) = \mathbf{a}_j^0. \quad (5-26)$$

接下来证明 $\mathbf{b}_j \in C^{1,1}([0, T_0], \mathbb{T}^2)$.

对任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $0 < h \ll 1$ 以及 $t \in [0, T_0]$, 存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(B_{r_0}(\mathbf{a}_j^0))$ 满足

$$\varphi_1 = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}, \quad \varphi_2 = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}^\perp, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0). \quad (5-27)$$

则

$$\nabla \mathbb{J} \varphi_1 + \nabla \varphi_2 = \mathbf{0} \quad \text{于 } B_{3r_0/4}(\mathbf{a}_j^0). \quad (5-28)$$

式 (5-15) 意味着

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \mu k_\varepsilon \partial_t \langle u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x} ds - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \partial_t J(u^\varepsilon) \varphi_1 \, d\mathbf{x} ds \\ & = \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x} ds, \end{aligned} \quad (5-29)$$

其中 ζ^h 定义为式 (4-28).

利用式 (5-28)、式 (5-12)、式 (5-20)、式 (5-16)、式 (5-22) 以及式 (5-23), 式 (5-29) 左手边第一项可作如下估计:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \partial_t \langle u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x} ds \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \partial_t \langle u_t^\varepsilon \nabla \varphi_2, \nabla u^\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x} ds \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \partial_t \langle u_t^\varepsilon (\mathbb{J} \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2), \nabla u^\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x} ds \\ & = \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \partial_t (\nabla \cdot (\text{Re}(\overline{u_t^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon))) \varphi_2 \, d\mathbf{x} ds \\ & \quad + O\left(\frac{1}{h} k_\varepsilon \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [t-h, t+h])} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}_{r_0}^2(\mathbf{a}^0) \times [t-h, t+h])}\right) \\ & = \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \partial_t^2 (k_\varepsilon h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(s))) \varphi_2 \, d\mathbf{x} ds + O(\sqrt{k_\varepsilon}) \\ & = \int_{\mathbb{T}^2} k_\varepsilon \frac{1}{h^2} (h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(t+h)) - 2h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) + h_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(t-h))) \varphi_2 \, d\mathbf{x} + o(1) \\ & = \pi \frac{\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t-h)}{h^2} \cdot \mathbf{v}^\perp + o(1). \end{aligned} \quad (5-30)$$

关于 s 分部积分并且利用式 (5-19), 可以知道式 (5-29) 左手边第二项等于

$$\int_{\mathbb{R}} (\zeta^h)'(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} J(u^\varepsilon(s)) \varphi_1 \, d\mathbf{x} ds = \frac{1}{h^2} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2} (J(u^\varepsilon(s)) - J(u^\varepsilon(s-h))) \varphi_1 \, d\mathbf{x} ds$$

$$= \frac{d_j \pi}{h^2} \int_t^{t+h} (\mathbf{b}_j(s) - \mathbf{b}_j(s-h)) \cdot \mathbf{v} ds + o(1) \leq C \|\mathbf{b}\|_{C^1[t-h, t+h]} + o(1). \quad (5-31)$$

式 (5-20) 意味着式 (5-29) 右手边小于

$$C \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \|\varphi_1\|_{C^2(\mathbb{T}^2)} \|\nabla u^\varepsilon\|_{\mathbb{T}_{3r_0/4}^2(a^0)}^2 ds \leq C. \quad (5-32)$$

取

$$\mathbf{v}^\perp = -\mathbb{J}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t-h)}{|\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t-h)|}, \quad (5-33)$$

并将式 (5-30)、式 (5-31) 和式 (5-32) 代入式 (5-29), 可以得到

$$\mu\pi \frac{|\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t-h)|}{h^2} \leq C \|\mathbf{b}\|_{C^1[t-h, t+h]} + C + o(1). \quad (5-34)$$

由上式可直接推出 $\mathbf{b} \in C^{1,1}([0, T])$. ■

5.1.2 流量的收敛性

利用引理 5.1 中得到的 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t) = (\mathbf{b}_1(t), \dots, \mathbf{b}_{2N}(t))$, 定义

$$u_* := u_*(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}; \mathbf{b}(t), \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))), \quad (5-35)$$

其中 $\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t))$ 连续且满足

$$\mathbf{q}_*(\mathbf{b}(0)) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)) \in 2\pi \sum_{j=1}^{2N} d_j \mathbf{b}_j(t) + 2\pi\mathbb{Z}^2. \quad (5-36)$$

引理 5.2: 假设 $u^\varepsilon, \mathbf{b}$ 如引理 5.1 中所给. 则对任意 $T_1 < T$, $\rho = \min_{t \in [0, T_1]} r(\mathbf{b}(t))$, 下式成立:

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}(u_*) \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]), \quad \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \frac{\mathbf{j}(u_*)}{|u_*|} \text{ 于 } L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (5-37)$$

证明 本引理证明本质上和引理 3.4 的证明一样, 仅有的区别在于证明

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_* - \mathbf{j}(u_*)) = 0, \quad (5-38)$$

其中 \mathbf{j}_* 满足

$$\mathbf{j}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{j}_* \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}^2 \times [0, T_1]), \quad \mathbf{j}(u^\varepsilon) = |u^\varepsilon| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \rightharpoonup \mathbf{j}_* \text{ 于 } L^1(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)) \times [0, T_1]). \quad (5-39)$$

\mathbf{j}_* 存在性的证明和引理 2.9 的证明第 1 步一样, 在此不再详述.

引理 2.3、式 (5-18)、式 (5-16) 以及式 (1-27) 可推导出

$$\int_0^{T_1} \left\| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} \right\|_{L^2(\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t)))}^2 dt \leq \int_0^{T_1} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} e^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) dx dt \leq CT_1, \quad (5-40)$$

$$\| |u^\varepsilon|^2 - 1 \|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (5-41)$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0, T])$, 式 (5-39)、式 (5-13)、式 (5-22) 以及式 (5-41) 可推导出

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}_* dx dt \right| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \nabla \varphi \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) dx dt \right| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \varphi \nabla \cdot \mathbf{j}(u^\varepsilon) dx dt \right| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu k_\varepsilon \operatorname{Im}(\bar{u}^\varepsilon u_t^\varepsilon) - \frac{1}{2}(|u^\varepsilon|^2 - 1) \right] dx dt \right| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}^2 \times [0, T]} \frac{\partial}{\partial t} \varphi \left[\mu k_\varepsilon \operatorname{Im}(\bar{u}^\varepsilon u_t^\varepsilon) - \frac{1}{2}(|u^\varepsilon|^2 - 1) \right] dx dt \right| \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(k_\varepsilon \|u_t^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [0, T])} + \| |u^\varepsilon|^2 - 1 \|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times [0, T])}) = 0, \end{aligned} \quad (5-42)$$

因而 $\nabla \cdot \mathbf{j}_* = 0$. 接下来利用式 (2-55) 和式 (5-35), 就会有

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_* - \mathbf{j}(u_*)) = 0. \quad (5-43)$$

类似地, 可以证明 $\nabla \cdot (\mathbb{J}(\mathbf{j}_* - \mathbf{j}(u_*))) = 0$. 然后重复引理 3.4 的证明的剩余部分即可完成本引理的证明. \blacksquare

5.1.3 解的能量下界估计

与引理 2.11 类似, 式 (5-16) 和式 (5-37) 意味着对任意 $0 \leq t_1 < t_2 < T$ 以及 $\rho < \min_{t \in [t_1, t_2]} r(\mathbf{b}(t))$,

$$0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}_\rho^2(\mathbf{b}(t))} \left(e^\varepsilon (|u^\varepsilon|) + \frac{1}{2} \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) dx dt \leq C \int_{t_1}^{t_2} \Sigma(t) dt, \quad (5-44)$$

其中

$$\Sigma(t) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))). \quad (5-45)$$

式 (5-44) 可直接推出

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t); \mathbf{q}_*(\mathbf{b}(t)))) \geq 0. \quad (5-46)$$

引理 3.5、式 (5-16)、式 (5-22) 以及式 (5-18) 意味着

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2 \times [t_1, t_2]} |u_t^\varepsilon(\mathbf{x}, s)|^2 dx ds \geq \pi \sum_{j=1}^{2N} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{b}}_j(s)|^2 ds. \quad (5-47)$$

5.2 约化动力学规律的证明

证明 设 \mathbf{a} 是式 (5-8) 的解, 而且 \mathbf{b} 由引理 5.1 给出. 定义

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{2N} (|\mathbf{b}_j(t) - \mathbf{a}_j(t)| + \mu|\dot{\mathbf{b}}_j(t) - \dot{\mathbf{a}}_j(t)|). \quad (5-48)$$

可以找到 $T_* < T$ 使得

$$\sup_{t \in [0, T_*]} \zeta(t) < r_* := \inf_{t \in [0, T_*]} \min\{r(\mathbf{a}(t)), r(\mathbf{b}(t))\}. \quad (5-49)$$

为了简单, 本节依然采用记号式 (2-138).

我们首先验证 $\dot{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{0}$. 式 (5-47)、式 (5-14)、式 (5-5)、式 (5-46) 和式 (5-26) 意味着

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2h} \int_0^h |\dot{\mathbf{b}}(t)|^2 dt &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{T}^2} \frac{k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx dt \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu h} \int_0^h \int_{\mathbb{T}^2} (h^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) - e^\varepsilon(u^\varepsilon(t))) dx dt \\ &\leq \frac{1}{\mu h} \int_0^h (W_\varepsilon(\mathbf{a}^0; \mathbf{q}_0) - W_\varepsilon(\mathbf{b}(t))) dt \leq C \frac{1}{\mu h} \int_0^h |\mathbf{a}_j^0 - \mathbf{b}_j(t)| dt \leq Ch. \end{aligned} \quad (5-50)$$

在上式中令 $h \rightarrow 0$, 就得到了 $\dot{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{0}$. 再考虑到式 (5-48)、式 (5-10) 和式 (5-26), 可以得到

$$\zeta(0) = 0. \quad (5-51)$$

对任意 $t < T_*$,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &\leq C \sum_{j=1}^{2N} |\dot{\mathbf{b}}_j(t) - \dot{\mathbf{a}}_j(t)| + \sum_{j=1}^{2N} |\mu \ddot{\mathbf{b}}_j(t) + \mathbb{J} \dot{\mathbf{b}}_j(t) - \mu \ddot{\mathbf{a}}_j(t) - \mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j(t)| \\ &\leq C \zeta + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left| \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) + \mu \pi \ddot{\mathbf{b}}_j(t) + \pi \mathbb{J} \dot{\mathbf{b}}_j(t) \right| \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2N} \left| \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(t)) - \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) \right| \\ &\leq C \zeta + \frac{1}{\pi} |\mathbf{A}_j(t)|, \end{aligned} \quad (5-52)$$

其中

$$\mathbf{A}_j(t) = \nabla_{\mathbf{b}_j} W(\mathbf{b}(t)) + \mu \pi \ddot{\mathbf{b}}_j(t) + \pi \mathbb{J} \dot{\mathbf{b}}_j(t). \quad (5-53)$$

存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(B_{r_*}(\mathbf{b}_j(t)))$ 满足

$$\varphi_1 = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}, \quad \varphi_2 = (\mathbf{x} - \mathbf{b}_j(t)) \cdot \mathbf{v}^\perp, \quad \mathbf{x} \in B_{3r_*/4}(\mathbf{b}_j(t)), \quad (5-54)$$

其中

$$\mathbf{v}^\perp = -\mathbb{J}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{A}_j}{|\mathbf{A}_j|}. \quad (5-55)$$

结合式 (5-30)、式 (5-31) 以及式 (4-28), 可得

$$\begin{aligned} & \mu\pi \frac{\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) - \mathbf{b}_j(t-h)}{h^2} \cdot \mathbf{v}^\perp - \frac{d_j\pi}{h^2} \int_t^{t+h} (\mathbf{b}_j(s) - \mathbf{b}_j(s-h)) \cdot \mathbf{v} ds + o(1) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \mu k_\varepsilon \partial_t \langle u_t^\varepsilon \nabla \varphi_1, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle dx ds - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \partial_t J(u^\varepsilon) \varphi_1 dx ds. \end{aligned} \quad (5-56)$$

通过式 (2-13)、式 (5-55)、式 (5-56)、式 (5-15)、式 (2-67) 以及式 (5-35) 可知

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_j(t)| &= \mathbf{A}_j(t) \cdot \mathbf{v}^\perp \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\mu\pi \frac{\mathbf{b}_j(t+h) - 2\mathbf{b}_j(t) + \mathbf{b}_j(t-h)}{h^2} \cdot \mathbf{v}^\perp \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_j\pi}{h^2} \int_t^{t+h} (\mathbf{b}_j(s) - \mathbf{b}_j(s-h)) \cdot \mathbf{v} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \rangle dx ds \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} (\langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla u^\varepsilon, \mathbb{J} \nabla u^\varepsilon \rangle \\ &\quad - \langle \text{Hess}(\varphi_1) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \rangle) dx ds \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (5-57)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \langle \text{Hess}(\varphi_1) \nabla |u^\varepsilon|, \nabla |u^\varepsilon| \rangle dx ds \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\varphi_1) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \right. \\ &\quad \left. \mathbb{J} \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle dx ds, \\ I_2 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\varphi_1) \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right), \mathbb{J} \mathbf{j}(u_*) \right\rangle dx ds \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \zeta^h(t-s) \int_{\mathbb{T}^2} \left\langle \text{Hess}(\varphi_1) \mathbf{j}(u_*), \mathbb{J} \left(\frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right) \right\rangle dx ds. \end{aligned} \quad (5-58)$$

式 (5-37) 直接推出

$$I_2 = 0. \quad (5-59)$$

取 $W(\mathbf{a}(s)) + \frac{\mu\pi}{2}|\dot{\mathbf{a}}(s)|^2$ 关于 s 的导数并且注意到式 (5-8), 可得

$$\frac{d}{dt} \left(W(\mathbf{a}(s)) + \frac{\mu\pi}{2}|\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 \right) = \sum_{j=1}^{2N} \left(\dot{\mathbf{a}}_j(s) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(s)) + \mu\pi \dot{\mathbf{a}}_j(s) \cdot \ddot{\mathbf{a}}_j(s) \right) \quad (5-60)$$

$$= \sum_{j=1}^{2N} \left(\dot{\mathbf{a}}_j(s) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(s)) - \dot{\mathbf{a}}_j(s) \cdot \nabla_{\mathbf{a}_j} W(\mathbf{a}(s)) - \pi d_j \dot{\mathbf{a}}_j(s) \cdot (\mathbb{J} \dot{\mathbf{a}}_j(s)) \right) = 0, \quad (5-61)$$

其意味着对任意 $s > 0$,

$$W(\mathbf{a}(s)) + \frac{\mu\pi}{2}|\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 \equiv W(\mathbf{a}(0)). \quad (5-62)$$

接下来, 结合式 (5-14)、式 (5-5)、式 (1-41)、式 (2-59) 以及式 (5-62), 有

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(u^\varepsilon(s)) &= H_\mu^\varepsilon(u^\varepsilon(s)) - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx = E^\varepsilon(u_0^\varepsilon) + \frac{\mu k_\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |u_1^\varepsilon|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx \\ &\leq W_\varepsilon(\mathbf{a}^0) - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx + o(1) \\ &= W_\varepsilon(\mathbf{a}(s)) + \frac{\mu\pi}{2}|\dot{\mathbf{a}}(s)|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx + o(1) \\ &\leq W_\varepsilon(\mathbf{b}(s)) + C\zeta(s) + \frac{\mu\pi}{2}|\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon|^2 dx + o(1). \end{aligned} \quad (5-63)$$

结合式 (5-63)、式 (5-44) 以及式 (5-47), 可以得到

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C}{h} \int_{t-h}^{t+h} \int_{\mathbb{T}^2_{3r_*/4}(\mathbf{b}(t))} \left(e^\varepsilon(|u^\varepsilon|) + \left| \frac{\mathbf{j}(u^\varepsilon)}{|u^\varepsilon|} - \mathbf{j}(u_*) \right|^2 \right) dx ds \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C}{h} \int_{t-h}^{t+h} \left(\zeta(s) + \frac{\mu\pi}{2}|\dot{\mathbf{b}}(s)|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\mu k_\varepsilon}{2} |u_t^\varepsilon(s)|^2 dx \right) ds \leq C\zeta(t). \end{aligned} \quad (5-64)$$

将式 (5-64)、式 (5-59) 以及式 (5-57) 代入式 (5-52) 就得到了

$$\dot{\zeta}(t) \leq C\zeta(t). \quad (5-65)$$

又因为 $\zeta(0) = 0$, 所以 $\zeta(t) = 0$ 对任意 $t \in [0, T_*]$ 成立, 也就是说 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{b}(t)$. 因此我们完成了证明. ■

5.3 数值结果

在 $\mu \rightarrow 0$ 时, NLSW 式 (5-1) 到 NLS 式 (2-1) 的收敛性已经得到了数值的研究和解析的研究^[78-79,82,85]. 而且在 $\mu \rightarrow 0$ 时, 有界区域上 NLSW 的约化动力学规律

收敛到 NLS 的约化动力学规律已经得到了 Yu^[55] 的理论证明. 基于定理 5.1 和定理 2.1, 我们以数值模拟的方式研究环面上 NLSWRDL 式 (5-8) 到 NLSRDL 式 (2-7) 在 $\mu \rightarrow 0$ 时的收敛性.

我们专注于量化涡旋偶极子, 即 $N = 1$ 的情况. 我们利用四阶龙格-库塔方法求解式 (5-8) 和式 (2-7), 时间步长为 $\Delta t = 10^{-4}$. 结果如图 5.1 所示.

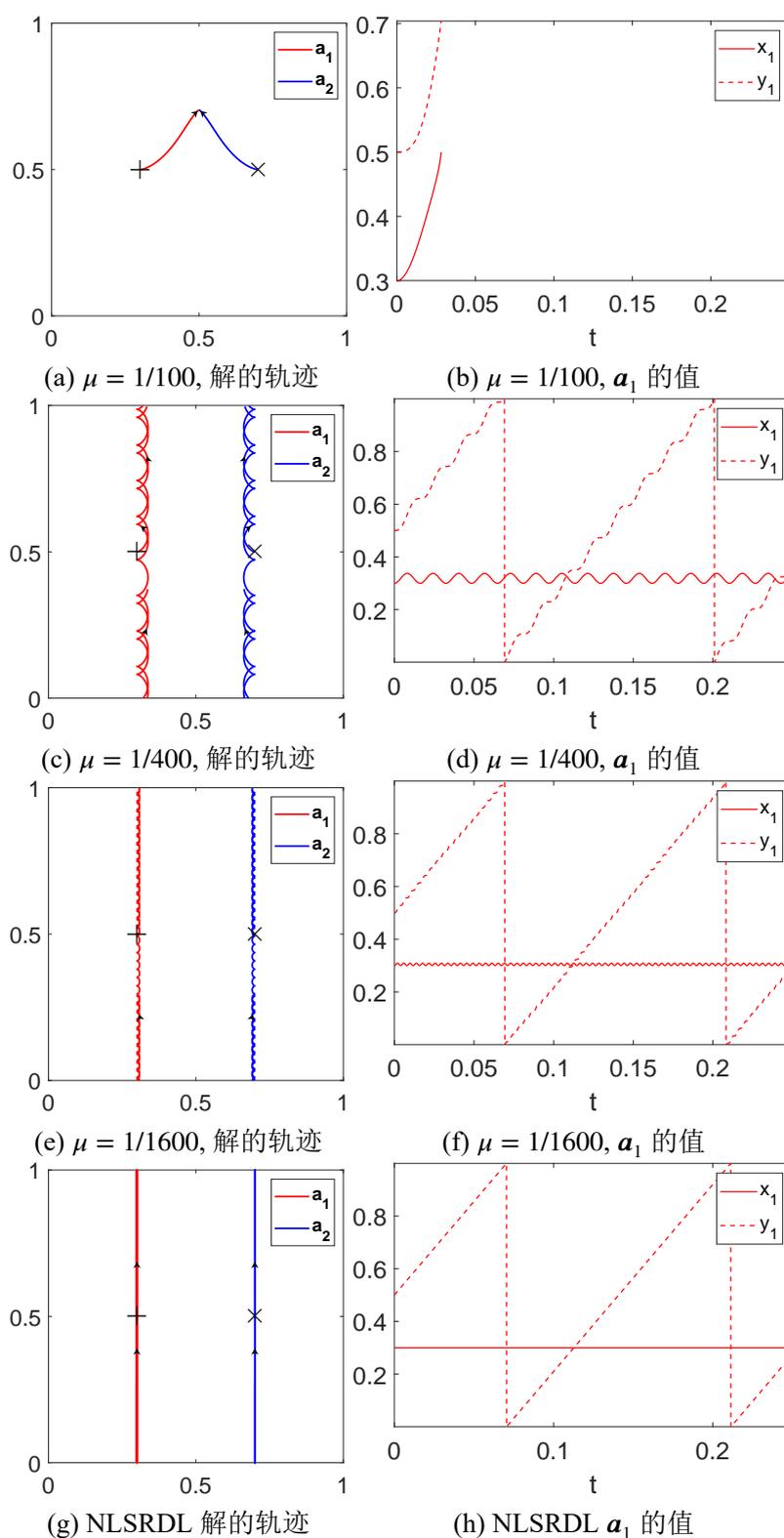


图 5.1 不同 μ 的式 (5-8) 与式 (2-7) 解的轨迹以及 $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)^T$ 的数值. 初值形如式 (5-10), 取 $\mathbf{a}_1^0 = (0.3, 0.5)^T$, $\mathbf{a}_2^0 = (0.7, 0.5)^T$, $\mathbf{q}_0 = 2\pi(\mathbf{a}_1^0 - \mathbf{a}_2^0)$. 在图中, + 和 x 分别表示环绕数为 +1 和 -1 的量化涡旋.

第6章 结论与展望

本文研究了在量化涡旋核心半径 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 非线性薛定谔方程式 (1-21)、复金兹堡-朗道方程式 (1-22)、非线性波方程式 (1-23) 以及带波算子的非线性薛定谔方程式 (1-24) 的量化涡旋的动力学规律, 即约化动力学规律.

具体说来, 本文讨论了环面上的规范调和映射与重整化能量, 并且证明了相关的能量估计, 研究了方程解 u^ε 的极限动量 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{Q}(u^\varepsilon(t))$ 关于时间 t 的连续性. 利用以上工具, 本文严格证明了: (1) 非线性薛定谔方程的约化动力学规律是一个哈密顿系统式 (2-7), 而且其哈密顿量就是环面上的重整化能量; (2) 复金兹堡-朗道方程的约化动力学规律式 (3-7) 是一个哈密顿系统与梯度流的混合, 而且其哈密顿量也是环面上的重整化能量; (3) 非线性波方程以及带波算子的非线性薛定谔方程的约化动力学规律是两个与环面上重整化能量直接相关的常微分方程式 (4-8)、式 (5-8).

此外, 本文还给出了式 (2-7) 和式 (3-7) 的一些首次积分和特定初值的解析解. 而且通过对相应约化动力学规律方程数值求解的方法, 本文初步研究了初值中量化涡旋位置和极限动量对量化涡旋运动的影响, 验证了在非相对论极限下 NLSW 的约化动力学规律式 (5-8) 到 NLS 的约化动力学规律式 (2-7) 的收敛性.

关于本论文的进一步研究, 我们有如下三个可能的方向:

1. 目前方程组的量化涡旋动力学规律尚未得到深入研究, 而其中又会出现如分数阶量化涡旋等有趣的新现象^[91]. 所以方程组的量化涡旋的动力学规律是一个值得研究的方向.

2. 如第 1.1.3 小节所述, 前人已经证明了高维空间中金兹堡-朗道方程量化涡旋演化遵循平均曲率流方程, 但高维空间中的非线性薛定谔方程方程量化涡旋的演化规律只有部分特例得到了证明, 所以高维空间中非线性薛定谔方程方程量化涡旋的演化规律的证明依然值得研究.

3. 方程的奇性往往局限在几个量化涡旋附近, 但已有的量化涡旋数值模拟方法多要求均匀网格, 事实上在 ε 很小时对算力有一定浪费, 计算消耗也会比较大. 利用我们得到的约化动力学规律设计相关算法, 减小计算消耗是值得考虑的方向.

参考文献

- [1] Ortiz G, Ceperley D M. Core structure of a vortex in superfluid ^4He [J/OL]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(25): 4642-4645. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4642.
- [2] Kobayashi M, Tsubota M. Kolmogorov spectrum of superfluid turbulence: Numerical analysis of the Gross-Pitaevskii equation with a small-scale dissipation[J/OL]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(6): 065302. DOI: 10.1103/physrevlett.94.065302.
- [3] Caracanhas M A, Massignan P, Fetter A L. Superfluid vortex dynamics on an ellipsoid and other surfaces of revolution[J/OL]. *Physical Review A*, 2022, 105(2): 023307. DOI: 10.1103/PhysRevA.105.023307.
- [4] Yarmchuk E, Gordon M, Packard R. Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid Helium[J/OL]. *Physical Review Letters*, 1979, 43(3): 214. DOI: 10.1103/PhysRevLett.43.214.
- [5] Barenghi C F, L'Vov V S, Roche P E. Experimental, numerical, and analytical velocity spectra in turbulent quantum fluid[J/OL]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2014, 111: 4683-4690. DOI: 10.1073/pnas.1312548111.
- [6] Sharma R G. Springer series in materials science: volume 214 superconductivity: Basics and applications to magnets[M/OL]. 2nd ed. Springer Cham, 2021: XXV,631. DOI: 10.1007/978-3-030-75672-7.
- [7] Bewley G P, Lathrop D P, Sreenivasan K R. Visualization of quantized vortices[J/OL]. *Nature*, 2006, 441(7093): 588-588. DOI: 10.1038/441588a.
- [8] 杨涛, 邹姗, 刘伍明. 玻色-爱因斯坦凝聚中的量子涡旋[J/OL]. *现代物理知识*, 2017, 29(02): 10-16. DOI: 10.13405/j.cnki.xdwz.2017.02.003.
- [9] 张安蕾, 葛军饴. 超导中的量子磁通涡旋[J/OL]. *自然杂志*, 2021, 43(04): 287-296. DOI: 10.3969/j.issn.0253-9608.2021.04.007.
- [10] Suderow H, Guillamón I, Rodrigo J G, et al. Imaging superconducting vortex cores and lattices with a scanning tunneling microscope[J/OL]. *Superconductor Science and Technology*, 2014, 27(6): 063001. DOI: 10.1088/0953-2048/27/6/063001.
- [11] Schmitt A. Introduction to superfluidity[M]. Springer Cham, 2014.
- [12] Tisza L. Transport phenomena in Helium II[J/OL]. *Nature*, 1938, 141(3577): 913-913. DOI: 10.1038/141913a0.
- [13] Landau L. Theory of the superfluidity of Helium II[J/OL]. *Physical Review*, 1941, 60(4): 356-358. DOI: 10.1103/PhysRev.60.356.
- [14] Gross E P. Hydrodynamics of a superfluid condensate[J/OL]. *Journal of Mathematical Physics*, 1963, 4(2): 195-207. DOI: 10.1063/1.1703944.
- [15] Pitaevskii L P. Vortex lines in an imperfect Bose gas[J]. *Soviet Physics JETP-USSR*, 1961, 13(2): 451-454.

-
- [16] Kagan M Y. Lecture notes in physics: Modern trends in superconductivity and superfluidity [M/OL]. Springer Dordrecht, 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-6961-8.
- [17] Kondaurova L P, Andryushchenko V A. Dynamics, properties and spectrum of reconnecting vortex loops in superfluid Helium (review article)[J/OL]. *Low Temperature Physics*, 2021, 47(9): 740-753. DOI: 10.1063/10.0005797.
- [18] Volovik G E. Superfluids in rotation: Landau-Lifshitz vortex sheets vs Onsager-Feynman vortices[J/OL]. *Physics-Uspekhi*, 2015, 58(9): 897. DOI: 10.3367/UFNe.0185.201509h.0970.
- [19] Gaff K T. Visualization of the vortex lattice dynamics in superfluid helium[D]. 2010.
- [20] Neu J C. Vortex dynamics of the nonlinear wave equation[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1990, 43(2): 407-420. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90144-E.
- [21] Mironescu P. On the stability of radial solutions of the Ginzburg-Landau equation[J/OL]. *Journal of Functional Analysis*, 1995, 130(2): 334-344. DOI: 10.1006/jfan.1995.1073.
- [22] Bethuel F, Brezis H, Hélein F. Ginzburg-Landau vortices[M/OL]. Cham: Springer International Publishing, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-66673-0_1.
- [23] Bao W, Zeng R, Zhang Y. Quantized vortex stability and interaction in the nonlinear wave equation[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, 237(19): 2391-2410. DOI: 10.1016/j.physd.2008.03.026.
- [24] Neu J C. Vortices in complex scalar fields[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1990, 43(2-3): 385-406. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90143-d.
- [25] Peres L, Rubinstein J. Vortex dynamics in $U(1)$ Ginzburg-Landau models[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, 64(1): 299-309. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90261-X.
- [26] Pismen L M, Rubinstein J. Motion of vortex lines in the Ginzburg-Landau model[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, 47(3): 353-360. DOI: 10.1016/0167-2789(91)90035-8.
- [27] Rubinstein J. Self-induced motion of line defects[J/OL]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1991, 49(1): 1-9. DOI: 10.1090/qam/1096227.
- [28] E W. Dynamics of vortices in Ginzburg-Landau theories with applications to superconductivity [J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1994, 77(4): 383-404. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90298-4.
- [29] Lin F H. Complex Ginzburg-Landau equations and dynamics of vortices, filaments, and codimension-2 submanifolds[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1998, 51(4): 385-441.
- [30] Sandier E, Shafrir I. Small energy Ginzburg-Landau minimizers in \mathbb{R}^3 [J/OL]. *Journal of Functional Analysis*, 2017, 272(9): 3946-3964. DOI: 10.1016/j.jfa.2017.01.010.
- [31] Ignat R, Kurzke M. Global Jacobian and Γ -convergence in a two-dimensional Ginzburg-Landau model for boundary vortices[J/OL]. *Journal of Functional Analysis*, 2021, 280(8): 108928. DOI: 10.1016/j.jfa.2021.108928.
- [32] Serfaty S, Tice I. Lorentz space estimates for the Ginzburg-Landau energy[J/OL]. *Journal of Functional Analysis*, 2008, 254(3): 773-825. DOI: 10.1016/j.jfa.2007.11.010.

-
- [33] Jerrard R L, Soner H M. The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy[J/OL]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2002, 14(2): 151-191. DOI: 10.1007/s005260100093.
- [34] Del Pino M, Kowalczyk M. Renormalized energy of interacting Ginzburg-Landau vortex filaments[J/OL]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2008, 77(3): 647-665. DOI: 10.1112/jlms/jdm126.
- [35] Lin F H. Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1996, 49(4): 323-359.
- [36] Jerrard R L, Soner H M. Dynamics of Ginzburg-Landau vortices[J/OL]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1998, 142(2): 99-125. DOI: 10.1007/s002050050085.
- [37] Sandier E, Serfaty S. Gamma-convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau[J/OL]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(12): 1627-1672. DOI: 10.1002/cpa.20046.
- [38] Bethuel F, Orlandi G, Smets D. Collisions and phase-vortex interactions in dissipative ginzburg-landau dynamics[J/OL]. *Duke Mathematical Journal*, 2005, 130(3): 523-614. DOI: 10.1215/S0012-7094-05-13034-4.
- [39] Jian H Y, Liu Y N. Ginzburg-Landau vortex and mean curvature flow with external force field [J/OL]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, 22(6): 1831-1842. DOI: 10.1007/s10114-005-0698-y.
- [40] Liu Z. Spinor Ginzburg-Landau equation and mean curvature flow[J/OL]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, 71(5): 2053-2086. DOI: 10.1016/j.na.2009.01.042.
- [41] Bethuel F, Orlandi G, Smets D. Convergence of the parabolic Ginzburg-Landau equation to motion by mean curvature[J/OL]. *Annals of Mathematics*, 2006, 163(1): 37-163. DOI: 10.4007/annals.2006.163.37.
- [42] Lin F H, Xin J X. On the incompressible fluid limit and the vortex motion law of the nonlinear Schrödinger equation[J/OL]. *Communications in Mathematical Physics*, 1999, 200(2): 249-274. DOI: 10.1007/s002200050529.
- [43] Colliander J E, Jerrard R L. Ginzburg-Landau vortices: weak stability and schrödinger equation dynamics[J/OL]. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1999, 77(1): 129-205. DOI: 10.1007/BF02791260.
- [44] Bethuel F, Jerrard R L, Smets D. On the NLS dynamics for infinite energy vortex configurations on the plane[J/OL]. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2008, 24(2): 671-702. DOI: 10.4171/RMI/552.
- [45] Jerrard R L, Spirn D. Refined Jacobian estimates and Gross-Pitaevsky vortex dynamics[J/OL]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2008, 190(3): 425-475. DOI: 10.1007/s00205-008-0167-8.
- [46] Chiron D. Vortex helices for the Gross-Pitaevskii equation[J/OL]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2005, 84(11): 1555-1647. DOI: 10.1016/j.matpur.2005.08.008.
- [47] Dávila J, del Pino M, Medina M, et al. Interacting helical traveling waves for the Gross-Pitaevskii equation[J/OL]. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, 2022, 39(6): 1319-1367. DOI: 10.4171/AIHPC/32.

-
- [48] Jerrard R L, Smets D. Dynamics of nearly parallel vortex filaments for the Gross-Pitaevskii equation[J/OL]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2021, 60: 127. DOI: 10.1007/s00526-021-01984-w.
- [49] Smets D, Orlandi G, Bethuel F. Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation[J/OL]. *Journal of the European Mathematical Society*, 2004, 6(1): 17-94. DOI: 10.4171/JEMS/2.
- [50] Miot E. Dynamics of vortices for the complex Ginzburg-Landau equation[J/OL]. *Analysis & PDE*, 2009, 2(2): 159-186. DOI: 10.2140/apde.2009.2.159.
- [51] Kurzke M, Melcher C, Moser R, et al. Dynamics for Ginzburg-Landau vortices under a mixed flow[J/OL]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2009, 58(6): 2597-2622. <http://www.jstor.org/stable/24903306>.
- [52] Schneider I, De Wolff B, Dai J Y. Pattern-selective feedback stabilization of Ginzburg-Landau spiral waves[J/OL]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2022, 246(2-3): 631-658. DOI: 10.1007/s00205-022-01826-9.
- [53] Lin F H. Vortex dynamics for the nonlinear wave equation[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1999, 52(6): 737-761.
- [54] Jerrard R L. Vortex dynamics for the Ginzburg-Landau wave equation[J/OL]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1999, 9(1): 1-30. DOI: 10.1007/s005260050131.
- [55] Yu Y. Vortex dynamics for nonlinear Klein-Gordon equation[J/OL]. *Journal of Differential Equations*, 2011, 251(4): 970-994. DOI: 10.1016/j.jde.2011.04.023.
- [56] Serfaty S. Mean field limits for Ginzburg-Landau vortices[J/OL]. *Séminaire Laurent Schwartz —EDP et applications*, 2016: 1-15. DOI: 10.5802/slsedp.91.
- [57] Serfaty S. Mean field limits of the Gross-Pitaevskii and parabolic Ginzburg-Landau equations [J/OL]. *Journal of the American Mathematical Society*, 2017, 30(3): 713-768. DOI: 10.1090/jams/872.
- [58] Chen K S, Sternberg P. Dynamics of Ginzburg-Landau and Gross-Pitaevskii vortices on manifolds[J/OL]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2014, 34(5): 1905-1931. DOI: 10.3934/dcds.2014.34.1905.
- [59] Ignat R, Jerrard R L. Renormalized energy between vortices in some Ginzburg-Landau models on 2-dimensional Riemannian manifolds[J/OL]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2021, 239(3): 1577-1666. DOI: 10.1007/s00205-020-01598-0.
- [60] Canevari G, Segatti A. Motion of vortices for the extrinsic Ginzburg-Landau flow for vector fields on surfaces[J/OL]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series S*, 2022, 15(8): 2087-2116. DOI: 10.3934/dcdss.2022116.
- [61] Jian H Y, Song B H. On the dynamics of Ginzburg-Landau vortices in inhomogeneous superconductors[J/OL]. *Methods and Applications of Analysis*, 2001, 8(4): 545-550. DOI: 10.4310/maa.2001.v8.n4.a4.
- [62] Contreras A, Jerrard R L. Local minimizers with unbounded vorticity for the 2D Ginzburg-Landau functional[J/OL]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2022, 75(9): 1997-2032. DOI: 10.1002/cpa.22043.

-
- [63] Sandier E, Serfaty S. From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems[J/OL]. *Communications in Mathematical Physics*, 2012, 313(3): 635-743. DOI: 10.1007/s00220-012-1508-x.
- [64] Lin F H, Lin T C. Multiple time scale dynamics in coupled Ginzburg-Landau equations[J/OL]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2003, 1(4): 671-695. DOI: 10.4310/CMS.2003.v1.n4.a3.
- [65] Lin F H, Lin T, Wei J. Skyrmions in Gross-Pitaevskii functionals[J/OL]. *Acta Mathematica Scientia*, 2009, 29(3): 751-776. DOI: 10.1016/S0252-9602(09)60069-2.
- [66] Bao W, Du Q, Zhang Y. Dynamics of rotating Bose-Einstein condensates and its efficient and accurate numerical computation[J/OL]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, 66: 758-786. DOI: 10.1137/050629392.
- [67] Bao W, Tang Q. Numerical study of quantized vortex interaction in the Ginzburg-Landau equation on bounded domains[J/OL]. *Communications in Computational Physics*, 2013, 14(3): 819-850. DOI: 10.4208/cicp.250112.061212a.
- [68] Bao W, Tang Q. Numerical study of quantized vortex interactions in the nonlinear Schrödinger equation on bounded domains[J/OL]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2014, 12(2): 411-439. DOI: 10.1137/130906489.
- [69] Jiang W, Tang Q. Numerical study of quantized vortex interaction in complex Ginzburg-Landau equation on bounded domains[J/OL]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 222: 210-230. DOI: 10.1016/j.amc.2013.07.043.
- [70] Zhang Y. Numerical study of vortex interactions in Bose-Einstein condensation[J/OL]. *Communications in Computational Physics*, 2010, 8: 327-350. DOI: 10.4208/cicp.2009.09.104.
- [71] Zhang Y, Bao W, Du Q. Numerical simulation of vortex dynamics in Ginzburg-Landau-Schrödinger equation[J/OL]. *European Journal of Applied Mathematics*, 2007, 18(5): 607-630. DOI: 10.1017/s0956792507007140.
- [72] Du Q, Ju L. Approximations of a Ginzburg-Landau model for superconducting hollow spheres based on spherical centroidal voronoi tessellations[J/OL]. *Mathematics of Computation*, 2004, 74(251): 1257-1281. DOI: 10.1090/s0025-5718-04-01719-3.
- [73] Jonsson B L G, Ovchinnikov Y N, Sigal I M, et al. Dynamics of breakup of multiple vortices in Gross-Pitaevskii equations of superfluids[J/OL]. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, 52(9): 093505. DOI: 10.1063/1.3629473.
- [74] Ignat R, Nguyen L, Slastikov V, et al. Uniqueness results for an ODE related to a generalized Ginzburg-Landau model for liquid crystals[J/OL]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2014, 46(5): 3390-3425. DOI: 10.1137/130948598.
- [75] Aranson I S, Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation[J/OL]. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 99-143. DOI: 10.1103/revmodphys.74.99.
- [76] Hohenberg P C, Krekhov A P. An introduction to the Ginzburg-Landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns[J/OL]. *Physics Reports*, 2015, 572: 1-42. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.01.001.

-
- [77] Mowlaei S, Roman A, Pleimling M. Spirals and coarsening patterns in the competition of many species: a complex Ginzburg-Landau approach[J/OL]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2014, 47(16): 165001. DOI: 10.1088/1751-8113/47/16/165001.
- [78] Machihara S, Nakanishi K, Ozawa T. Nonrelativistic limit in the energy space for nonlinear Klein-Gordon equations[J/OL]. *Mathematische Annalen*, 2002, 322(3): 603-621. DOI: 10.1007/s002080200008.
- [79] Schoene A Y. On the nonrelativistic limits of the Klein-Gordon and dirac equations[J/OL]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979, 71(1): 36-47. DOI: 10.1016/0022-247X(79)90216-6.
- [80] Tsutsumi M. Nonrelativistic approximation of nonlinear Klein-Gordon equations in two space dimensions[J/OL]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1984, 8(6): 637-643. DOI: 10.1016/0362-546X(84)90008-7.
- [81] Colin T, Fabrie P. Semidiscretization in time for nonlinear Schrödinger-waves equations[J/OL]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 1998, 4(4): 671-690. DOI: 10.3934/dcds.1998.4.671.
- [82] Bergé L, Colin T. A singular perturbation problem for an envelope equation in plasma physics [J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1995, 84(3): 437-459. DOI: 10.1016/0167-2789(94)00242-I.
- [83] Bao W, Dong X, Xin J. Comparisons between sine-Gordon and perturbed nonlinear Schrödinger equations for modeling light bullets beyond critical collapse[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2010, 239(13): 1120-1134. DOI: 10.1016/j.physd.2010.03.002.
- [84] Xin J X. Modeling light bullets with the two-dimensional sine-Gordon equation[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, 135(3): 345-368. DOI: 10.1016/S0167-2789(99)00128-1.
- [85] Bao W, Cai Y. Uniform and optimal error estimates of an exponential wave integrator sine pseudospectral method for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J/OL]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2014, 52(3): 1103-1127. DOI: 10.1137/120866890.
- [86] Zhu Y, Bao W, Jian H. Quantized vortex dynamics of the nonlinear Schrödinger equation on torus with non-vanishing momentum[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2023, 453: 133812. DOI: 10.1016/j.physd.2023.133812.
- [87] Zhu Y. Quantized vortex dynamics of the complex Ginzburg-Landau equation on torus[A]. preprint, 2023. arXiv: 2304.08301.
- [88] Sandier E, Serfaty S. A product-estimate for Ginzburg-Landau and corollaries[J/OL]. *Journal of Functional Analysis*, 2004, 211(1): 219-244. DOI: 10.1016/S0022-1236(03)00199-X.
- [89] Zhu Y. Quantized vortex dynamics of the nonlinear wave equation on the torus[J/OL]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, to appear. DOI: 10.3934/dcdsb.2023188.
- [90] Zhu Y. Quantized vortex dynamics of the nonlinear Schrödinger equation with wave operator on the torus[A]. preprint, 2023. arXiv: 2308.10640.
- [91] Yang W C, Xia C Y, Nitta M, et al. Fractional and integer vortex dynamics in strongly coupled two-component Bose-Einstein condensates from AdS/CFT correspondence[J/OL]. *Physical Review D*, 2020, 102(4): 046012. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.046012.

致 谢

在博士阶段学习中，我受益于导师简怀玉教授的关怀和指导颇多。在研究早期，简老师和我一起讨论文章、推荐我参加学术会议、积极推动我通过 CSC 留学，极大地提高了我的学术能力、丰富了我的经历和见识。在我研究受挫难以得到成果时，简老师的鼓励给了我坚持下去的动力。在我对未来职业选择迷茫时，简老师能指点迷津、帮助我进行学术生涯规划。简老师的教导不仅提高我科研的能力，更提高了我的科研品味、影响了我的人生态度，这些将使我受益终生。在此，我向简老师表示衷心的感谢。

我的课题时简老师和包维柱教授共同建议和指导的，我也有幸在新加坡国立大学数学系跟随包老师学习两年。包老师治学严谨，无论是论文还是学术汇报，包老师都会严厉地提出许多建议，端正我的态度。包老师在我遇到困惑时提供帮助，取得进步时嘉奖鼓励，提高了我的科研信心。包老师对科研有着独到的理解，与他交流让我获益匪浅。我对包老师不胜感激。

蔡勇勇教授对我科研给予了很大的帮助。在我科研的初期，他指导我学习研究薛定谔方程以及克莱因-戈尔登方程，为我接下来的研究打下了基础。在之后的交流中，蔡老师也无私地提供建议。我由衷地感谢蔡老师的帮助。

在读博期间我一直受到老师和同学们的帮助，与他们的学术交流拓宽我学术视野，与他们的生活互动丰富我生活色彩。正是因为有了这些互动交流，我才度过了难忘的博士生时光，非常感谢。

承蒙国家留学基金委资助，本人才得以在新加坡国立大学数学系跟随包老师学习，特此致谢。

论文课题承蒙国家自然科学基金（基金号：12141103）资助，特此致谢。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：朱永头 日 期：2023年12月6日

个人简历、在学期间完成的相关学术成果

个人简历

1996年11月29日出生于河北省沧州市献县。

2014年8月考入清华大学数学科学系数学与应用数学专业，2018年7月本科毕业并获得理学学士学位。

2018年9月保研进入清华大学数学科学攻读应用数学博士至今。

在学期间完成的相关学术成果

学术论文：

已发表

- [1] Zhu Y, Bao W, Jian H. Quantized vortex dynamics of the nonlinear Schrödinger equation on torus with non-vanishing momentum[J/OL]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2023, 453: 133812. DOI: 10.1016/j.physd.2023.133812.
- [2] Zhu Y. Quantized vortex dynamics of the nonlinear wave equation on the torus[J/OL]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, to appear. DOI: 10.3934/dcdsb.2023188.

在投

- [3] Zhu Y. Quantized vortex dynamics of the complex Ginzburg-Landau equation on torus[A]. preprint, 2023. arxiv:2304.08301 (Submitted to *Journal of Differential Equations* and one referee suggested acceptance after minor revisions.).
- [4] Zhu Y. Quantized vortex dynamics of the nonlinear Schrödinger equation with wave operator on the torus[A]. preprint, 2023. arXiv:2308.10640.

指导教师评语

朱永兴的博士学位论文主要研究了环面上的四类偏微分方程量化涡旋的约化动力学规律问题。由于量化涡旋研究在超导、超流和玻色-爱因斯坦凝聚研究中有着重要作用，从二十世纪九十年代至今一直是应用偏微分方程研究领域中的热门课题。因此该论文选题具有重要的意义。论文的创新主要体现在首次针对环面上的偏微分方程量化涡旋的研究，主要成果如下：1) 对已有的适用于有界区域的规范调和映射、重整化能量等重要函数进行改良和修正，建立起环面上相关函数之间的关系；2) 借助于已有的适用于有界区域的能量估计方法，建立起适用于环面上量化涡旋研究的能量估计关系；3) 利用前两方面的成果，证明了非线性薛定谔方程、复金兹堡-朗道方程、非线性波方程和带波算子的非线性薛定谔方程的量化涡旋约化动力学规律。上述成果已整理成四篇论文，其中有两篇分别发表在 *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2023, 453: 133812 和 *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* (DOI: 10.3934/dcdsb.2023188) 上，还有一篇已投 *Journal of Differential Equations*，审稿人建议稍作修改后发表。综上所述，我认为朱永兴的博士论文选题前沿，成果多且创新强，表明他有很好的基础和独立从事研究工作的能力。同意其进行博士论文答辩。

朱永兴在读五年期间，政治表现好，热爱国家，热爱学校。他学习刻苦，研究勤奋，持之以恒，使自己具备了坚实的基础理论知识和深厚的分析和偏微分方程的功底。他的研究工作独立，研究能力强，敢于创新，勇于做难问题，学术作风过硬。其申请博士学位创新成果简介一栏客观真实，同意其组织博士学位论文答辩。

答辩委员会决议书

超导、超流和玻色-爱因斯坦凝聚是极低温下部分物质表现出的特殊状态，量化涡旋的研究是与这些物质状态相关核心的数学物理问题。量化涡旋问题通常用非线性薛定谔方程、复金兹堡-朗道方程、非线性波方程以及带波算子的非线性薛定谔方程等描述。朱永兴的博士论文研究了上述偏微分方程量化涡旋的约化运动规律，其选题具有明确的物理背景和重要的理论意义。

该论文的主要成果如下：

- 1) 系统地研究了环面上规范调和映射和重整化能量，证明了相应的能量估计；
- 2) 通过引入重整化能量，研究了环面上的非线性薛定谔方程等四类偏微分方程的约化动力学规律，证明了该规律是由环面上重整化能量相关的常微分方程确定；
- 3) 通过对四个约化动力学规律方程数值求解，初步研究了初值位置和极限动量对量化涡旋运动的影响。

上述结果具有很强的创新性。朱永兴博士论文结构完整、写作规范、论证严谨，表明作者具有扎实的数学基础，掌握了量化涡旋研究的基本方法，对相关领域发展和现状有着深入的了解，具有独立从事科学研究的能力。

答辩过程中，朱永兴同学陈述论文清楚，回答问题准确。

答辩委员会经投票一致（6票）认为这是一篇优秀的博士学位论文，同意通过其论文答辩，并建议授予朱永兴博士学位。